



# آمار و احتمال

امیر سلیمانی  
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی

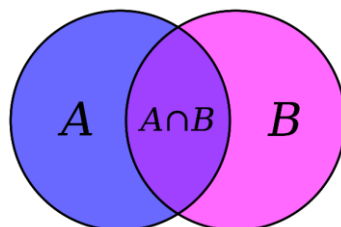
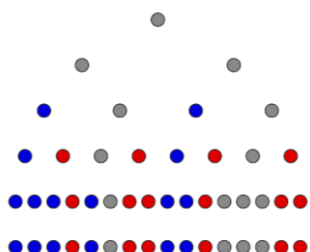


این مجموعه همراه تدریس ویدیویی دوره  
آموزشی سامانه امکان می باشد و به تنهایی  
قابل استفاده و بهینه نمی باشد



# آشنایی با منطق ریاضی بخش 1

## آشنایی با مبانی ریاضیات





## منطق ریاضی



منطق ریاضی یا منطق نمادین، دستور زبان ریاضی، یا مطالعه ساختارها و جمله‌های بکار برده شده در ریاضی است.

منطق ریاضی به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

## تعریف گزاره



گزاره جمله خبری است که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد. گزاره نمی‌تواند همزمان هم درست و هم نادرست باشد.

✓ لیگ انگلیس دارای 20 تیم است.

✗ نظم کلاس را رعایت کنید.

✗ شاملو عجب شاعری است!







نکته



- به درستی یا نادرستی گزاره ارزش گزاره می‌گوییم.
- گزاره‌ها را معمولاً با حروف کوچک مشخص می‌کنیم.

- جملات امری، عاطفی، پرسشی گزاره نیستند.

✗ آیا  $2 + 7$  برابر با 8 میشود؟

- همه حدس‌های ریاضی گزاره هستند.

☑ هر عدد زوج بزرگتر از 2 را میتوان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت. (حدس گلدباخ)

تست



چه تعداد از جمله‌های زیر گزاره محسوب نمی‌شود؟

(الف) چه هوای خوبی

(ب) لطفاً در کلاس را ببندید.

(پ) ای کاش می‌توانستم در یک هوای سالم زندگی کنم.

(ت) صدمین رقم بعد از ممیز عدد  $\pi$  برابر با ۳ است.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)





## گزاره نما



هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیر به گزاره تبدیل می شود گزاره نما است. (راجع به ارزش نمی توانیم نظر بدهیم).

گزاره نما می توانند یک متغیره، دو متغیره و... باشند.

✓  $a$  عددی فرد است. (گزاره نمای یک متغیره)

✗ اگر  $k$  عددی صحیح باشد،  $2k + 1$  فرد است.

## نکته



گزاره نما به خودی خود ارزشی ندارد، بلکه تنها وقتی ارزش می گیرد که به جای متغیرهای آن مقادیری قرار دهیم.

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \checkmark$$

## نکته



عبارت های ریاضی نیز می توانند گزاره باشند در صورتی که دامنه ای ضمنی داشته باشیم. عبارت هایی که همواره درست هستند (اتحادها و قضایا) گزاره درست هستند.

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \checkmark$$





## دامنه متغیر



به مجموعه مقادیری که می توان به جای متغیر گزاره نما قرار داد تا به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره نما بوده و با  $D$  نمایش داده میشود.  
 $D \rightarrow \text{Domain}$

$p$  عددی اول است. (مجموعه اعداد طبیعی) ☒

$(x + 1)^2 = 4$  (مجموعه اعداد حقیقی) ☒

## مجموعه جواب



به مجموعه عضوهای  $D$  که ارزش گزاره در آنها درست است، مجموعه جواب می گوییم و آنرا با  $S$  نمایش می دهیم. ( $S$  زیرمجموعه ای از  $D$  است.)

$S \rightarrow \text{Solution}$

$p$  عددی اول است. (مجموعه اعداد اول) ☒

$(1, -3)$   $(x + 1)^2 = 4$  ☒





اگر دامنه متغیر گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد طبیعی باشد، آنگاه مجموعه جواب کدام گزاره‌ها تهی است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad n^2 - 8n + 15 &< 0 \\ (2) \quad 2^n &< n^2 \\ (3) \quad (n+1)! &< 2^n \\ (4) \quad n + \frac{1}{n} &\leq 2 \end{aligned}$$

### جدول ارزش گزاره‌ها



ارزش هر گزاره درست  $T$  یا نادرست  $F$  است.  
جدول ارزش گزاره را مانند زیر تعریف می‌کنیم.

| $p$ | $q$ |
|-----|-----|
| د   | د   |
| د   | ن   |
| ن   | د   |
| ن   | ن   |





## جدول ارزش گزاره ها



ارزش گزاره سه متغیر

| $p$ | $q$ | $r$ |
|-----|-----|-----|
| د   | د   | د   |
| د   | د   | ن   |
| د   | ن   | د   |
| د   | ن   | ن   |
| ن   | د   | د   |
| ن   | د   | ن   |
| ن   | ن   | د   |
| ن   | ن   | ن   |

جدول ارزش گزاره  $n$  دارای  $2^n$  حالت خواهد بود.

تست



اگر جدول ارزش گزاره ها را برای سه گزاره  $p$ ،  $q$  و  $r$  رسم کنیم، چند خانه از این جدول را با ارزش "درست" نشان خواهیم داد؟

۸ (۲)

۴ (۱)

۲۴ (۴)

۱۲ (۳)





## ترکیب گزاره ها



از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب بوجود می‌آیند.

✓ والتر معلم شیمی و همسرش خانه‌دار است.

✗ لبرون جیمز بسکتبالیست است. پله برنده سه دوره جام جهانی است.

## نقیض گزاره



نقیض گزاره  $p$  را به صورت  $\sim p$  نشان می‌دهیم. نقیض به صورت «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم.

11 بر 2 بخش پذیر نیست.

چنین نیست که 11 بر 2 بخش پذیر نباشد.

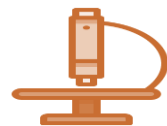
11 بر 2 بخش پذیر است.

| $p$ | $\sim p$ |
|-----|----------|
| د   | ن        |
| ن   | د        |





نکته



اگر دو گزاره همواره ارزش یکسانی داشته باشند، گوییم این دو هم ارز منطقی اند. هدف اصلی ما مشخص کردن هم ارزی گزاره ها است.

اگر دو گزاره هم ارز منطقی باشند :  $p \equiv q$

$p \equiv \sim(\sim p)$  ✓

| $p$ | $\sim p$ | $\sim(\sim p)$ |
|-----|----------|----------------|
| د   | ن        | د              |
| ن   | د        | ن              |

ترکیب فصلی



اگر گزاره مرکب « $p$  یا  $q$ » را ترکیب فصلی دو گزاره گویند. ترکیب فصلی را با  $p \vee q$  نشان داده و به  $\vee$  فاصل گوییم.

✓ توپ طلا را یا مسی می برد یا رونالدو.

✗ 11 عدد اول و تمام ارقام آن یکسان اند.





نکته



ترکیب فصلی در صورتی درست است که حداقل یکی از گزاره های آن درست باشند.

✓ رابرت دنیرو یا آل پاچینو یا جو پشی این نقش را بازی می کند.

اگر یکی از گزاره های ترکیب فصلی درست باشد نیاز به بررسی بقیه موارد نیست.

ترکیب عطفی



اگر گزاره مرکب « $p$  و  $q$ » را ترکیب عطفی دو گزاره گویند. ترکیب عطفی را با  $p \wedge q$  نشان داده و به  $\wedge$  عاطف گوئیم.

✓ شرلوک به مایکرافت و واتسون دروغ گفت.

✗ یا 13 عدد اول است یا 14.







نکته



ترکیب عطفی در صورتی غلط است که یکی از گزاره های آن نادرست باشند.

**✗ 3921 بر 23 بخش پذیر و 4 عدد اول است.**

اگر یکی از گزاره های ترکیب عطفی غلط باشد نیاز به بررسی بقیه موارد نیست.

ترکیب فصلی و عطفی



| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\sim p \vee q$ | $p \wedge q$ | $\sim p \wedge q$ |
|-----|-----|------------|-----------------|--------------|-------------------|
| د   | د   | د          | د               | د            | ن                 |
| د   | ن   | د          | ن               | ن            | ن                 |
| ن   | د   | د          | د               | ن            | د                 |
| ن   | ن   | ن          | د               | ن            | ن                 |

ترکیب عطفی تنها در یکی از ردیف ها درست

ترکیب فصلی تنها در یکی از ردیف ها غلط

سامانه امکان ؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





تست



در جاهای خالی به ترتیب چه عباراتی قرار دهیم تا ارزش  $p \wedge q$  درست باشد؟

p: "عدد ۲ از عدد ۳ ... است"

q: "عدد ۳ از عدد ۲ ... است"

(۲) کوچکتر - کوچکتر

(۱) کوچکتر - بزرگتر

(۴) بزرگتر - بزرگتر

(۳) بزرگتر - کوچکتر

تست



اگر گزاره  $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee r)$  درست باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های p، q و r به ترتیب از راست به چپ کدام نمی‌تواند باشد؟

(۲) نادرست - نادرست - درست

(۱) نادرست - درست - درست

(۴) درست - درست - نادرست

(۳) درست - نادرست - نادرست





## قوانین اساسی

از  $p$  و  $\sim p$  یک درست

$$p \wedge (\sim p) \equiv F$$

$$p \vee (\sim p) \equiv T$$

## قوانین جابجایی

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \vee F \equiv p$$

$$p \wedge F \equiv F$$

$$p \wedge T \equiv p$$

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

## تست



اگر  $p$  گزاره‌ای درست و  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

$$\sim (p \vee \sim q) \wedge \sim r \quad (۲)$$

$$(\sim q \vee r) \wedge p \quad (۴)$$

$$(\sim p \wedge q) \wedge r \quad (۱)$$

$$(\sim p \vee r) \wedge q \quad (۳)$$





تست



اگر گزاره  $(p \vee \sim q)$  درست و گزاره  $(\sim p)$  نادرست باشد، آنگاه  $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$  هم‌ارز منطقی با کدام گزاره زیر است؟

$\sim r$  (۲)

$r$  (۱)

$F$  (۴)

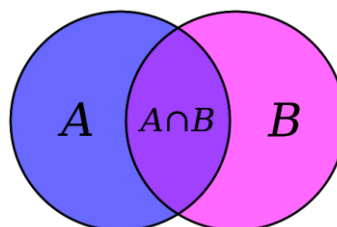
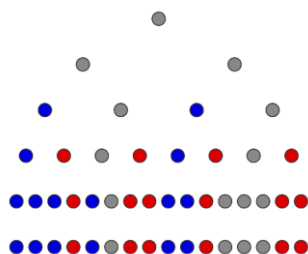
$T$  (۳)





# آشنایی با منطق ریاضی بخش 2

## آشنایی با مبانی ریاضیات



هم ارزی های اصلی



قوانین شرکت پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

قوانین توزیع پذیری (پخشی)

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





اثبات بخشی  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$



| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee (q \wedge r)$ | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
|-----|-----|-----|-----------------------|--------------------------------|
| د   | د   | د   |                       |                                |
| د   | د   | ن   |                       |                                |
| د   | ن   | د   |                       |                                |
| د   | ن   | ن   |                       |                                |
| ن   | د   | د   |                       |                                |
| ن   | د   | ن   |                       |                                |
| ن   | ن   | د   |                       |                                |
| ن   | ن   | ن   |                       |                                |

هم ارزی های اصلی



قوانین دمورگان

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

قوانین جذب

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$





تست



کدامیک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزاره  $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$  است؟

$$\sim q \quad (۲)$$

$$\sim (p \wedge q) \quad (۱)$$

$$\sim p \quad (۴)$$

$$p \vee q \quad (۳)$$

تست



اگر  $p$  گزاره‌ای درست و  $q$  گزاره‌ای نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

$$(\sim p \wedge q) \vee r \quad \text{الف)}$$

$$(\sim p \vee r) \wedge q \quad \text{ب)}$$

$$\sim (p \vee \sim q) \wedge r \quad \text{پ)}$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

تست



گزاره  $[(p \vee \sim q) \vee \sim r] \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  معادل کدامیک از گزاره‌های زیر است؟ (T)  
گزاره همیشه درست و F گزاره همیشه نادرست است)

$$q \vee r \quad (۲)$$

$$p \quad (۱)$$

$$F \quad (۴)$$

$$T \quad (۳)$$

سامانه امکان : آموزش مجاری هندور

www.Emkana.app





## ترکیب شرطی



هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره « $p \Rightarrow q$ » که بصورت «اگر  $p$  آنگاه  $q$ » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی  $p$  را مقدم (فرض) و  $q$  را تالی (حکم) می‌نامیم.

☑ اگر جویی دوست چندلر باشد، دوست راس نیز هست.

## ترکیب شرطی



هرگاه ارزش  $p$  نادرست باشد، آنگاه ارزش گزاره مرکب همواره به انتفای مقدم درست است.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim p \vee q$ | $\sim(p \Rightarrow q)$ | $p \wedge \sim q$ |
|-----|-----|-------------------|-----------------|-------------------------|-------------------|
| د   | د   | د                 |                 | ن                       |                   |
| د   | ن   | ن                 |                 | د                       |                   |
| ن   | د   | د                 |                 | ن                       |                   |
| ن   | ن   | د                 |                 | ن                       |                   |







## عکس نقیض گزاره شرطی



گزاره  $\sim q \Rightarrow \sim p$  عکس نقیض ترکیب شرطی  
 $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv q \vee (\sim p) \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

| $p$ | $\sim p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim q \Rightarrow \sim p$ |
|-----|----------|-----|----------|-------------------|-----------------------------|
| د   | ن        | د   | ن        | د                 |                             |
| د   | ن        | ن   | د        | ن                 |                             |
| ن   | د        | د   | ن        | د                 |                             |
| ن   | د        | ن   | د        | د                 |                             |

تست



کدام گزینه در مورد گزاره  $(p \Rightarrow \sim p)$  درست است؟

(۲) این گزاره همیشه نادرست است.

(۱) این گزاره همیشه درست است.

(۴) با  $p$  هم‌ارز است.

(۳) با  $\sim p$  هم‌ارز است.





تست



در کدام یک از حالت‌های زیر، ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ ، نادرست است؟

- (۱)  $p$  و  $q$  هر دو درست باشند.  
(۲)  $p$  درست و  $q$  نادرست باشد.  
(۳)  $p$  نادرست و  $q$  درست باشد.  
(۴)  $p$  و  $q$  هر دو نادرست باشند.

شرط لازم و کافی



گزاره  $p \Rightarrow q$  عکس گزاره  $q \Rightarrow p$  است.

گزاره شرطی درست:

$p$  شرط کافی  $q$

$q$  شرط لازم  $p$

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| د   | د   | د                 |
| د   | ن   | ن                 |
| ن   | د   | د                 |
| ن   | ن   | د                 |





نکته



تمرین صفحه 11: گزاره های زیر را اثبات کنید.

حذف عاطف  $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

ادخال فاصل  $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

تمرین صفحه 17: دو گزاره زیر هم ارزند.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

نکته



تعدادی از گزاره ها همواره درست هستند.

$p \vee (\sim p)$  ☒ گزاره همیشه درست

تعدادی از گزاره ها نیز همواره نادرست هستند.

$p \wedge (\sim p)$  ☒ گزاره همیشه نادرست





## ترکیب شرطی

برای اثبات یک عبارت شرطی میتوان عکس نقیض آنرا اثبات کرد.  
$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

✓ اگر  $a \in \mathbb{Z}$  و  $a^2$  عددی فرد باشد،  $a$  فرد است.

## تست

عکس نقیض گزاره "اگر  $a > b$  باشد، آنگاه  $a^3 > b^3$  است" به کدام صورت نوشته میشود؟  
( $a, b \in \mathbb{R}$ )

- (۱) اگر  $a^3 > b^3$  باشد، آنگاه  $a > b$  است.
- (۲) اگر  $a^3 < b^3$  باشد، آنگاه  $a < b$  است.
- (۳) اگر  $a^3 \geq b^3$  باشد، آنگاه  $a \geq b$  است.
- (۴) اگر  $a^3 \leq b^3$  باشد، آنگاه  $a \leq b$  است.





## ترکیب دو شرطی



هرگاه دو گزاره  $p$  و  $q$  را داشته باشیم، به گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  که صورت آن را مانند  $p \Leftrightarrow q$  می‌نویسیم ترکیب دو شرطی  $p$  و  $q$  می‌نامیم.  
«اگر  $p$ ، آنگاه  $q$  و برعکس»

✓ 99 عدد اول نیست  $\Leftrightarrow$  6 عدد اول است.

## ترکیب دو شرطی



$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|-----------------------|
| د   | د   | د                 | د                 | د                     |
| د   | ن   | ن                 | د                 | ن                     |
| ن   | د   | د                 | ن                 | ن                     |
| ن   | ن   | د                 | د                 | د                     |





نکته



$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$$

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ |
|-----|-----|-----------------------|----------|----------|---------------------------------|
| د   | د   | د                     |          |          |                                 |
| د   | ن   | ن                     |          |          |                                 |
| ن   | د   | د                     |          |          |                                 |
| ن   | ن   | د                     |          |          |                                 |

تست



اگر ارزش گزاره  $p \Leftrightarrow \sim q$  نادرست باشد، ارزش کدامیک از گزاره‌های زیر قطعاً درست است؟

$$p \vee q \quad (۲)$$

$$p \Rightarrow q \quad (۱)$$

$$p \Rightarrow \sim q \quad (۴)$$

$$p \wedge q \quad (۳)$$

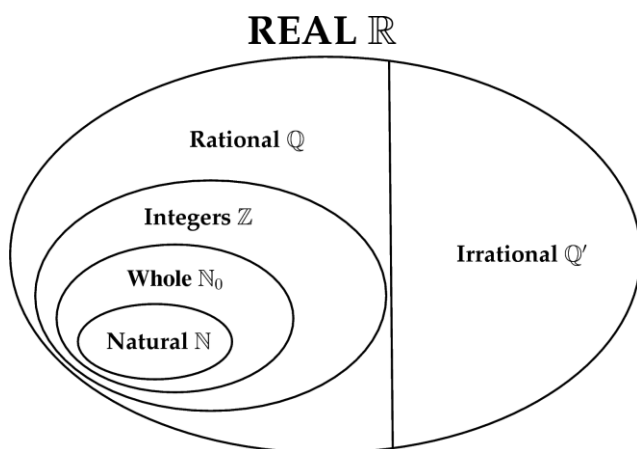
سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





## مجموعه اعداد



اعداد زوج  $E$

اعداد فرد  $O$

اعداد فرد  $P$

اعداد طبیعی  $N$

اعداد حسابی  $W$

اعداد صحیح  $Z$

## سورها



عبارت های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف اند. در صورتی که این عبارات قبل گزاره‌ها قرار گیرند، گزاره با ارزش درست یا نادرست ایجاد می کنند.

✓  $x$  میوه ای گرد است.  $\Leftrightarrow$  هر میوه ای گرد است.

✓ بازیگر  $y$  جایزه کن را گرفته است.  $\Leftrightarrow$  بعضی بازیگران جایزه کن را گرفته اند.





سور عمومی



به جای «به ازای هر» و «به ازای جميع مقادير» از نماد  $\forall$  استفاده کرده و به آن سور عمومی می‌گوییم.

✓ هر عدد زوج را می‌توان بصورت  $2k$  نوشت.  
 $\forall a \in E; a = 2k (k \in \mathbb{Z})$

سور عمومی



سور عمومی هنگامی درست است که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند، به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

$$\forall x \in \mathbb{R}; |x|^2 = (-x)^2 \quad \checkmark$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \tan(x) \times \cot(x) = 1 \quad \times$$







## سور وجودی



به جای «وجود دارد» و «به ازای بعضی مقادیر» از نماد  $\exists$  استفاده کرده و سور وجودی می‌گوییم.

☑ بعضی از اعداد فرد، عدد اول است.

$$\exists a \in O; a \in P$$

این سور وقتی درست که مجموعه جواب تهی نباشد.

$$\exists x \in \mathbb{N}; (x + 1)^2 = 4 \quad \text{☑}$$

$$\forall x \in \mathbb{Q}; 2x^2 = -3 \quad \text{✗}$$

## نقیض گزاره عمومی



برای پیدا کردن نقیض گزاره سور عمومی باید گزاره زیر را بدست آوریم.

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

$$\sim(\forall x \in A; x + 2 \leq 9) \equiv (\exists x \in A; x + 2 > 9) \quad \text{☑}$$





## نقیض گزاره وجودی



برای پیدا کردن نقیض گزاره سور وجودی باید گزاره زیر را بدست آوریم.

$$\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

☑ عبارت روبرو  $\sim(\exists x \in A; (x+2)^2 \leq 4)$   
معادل است با  $(\forall x \in A; (x+2)^2 > 4)$

تست



نقیض گزاره  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$  کدام است؟

$$\exists x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \wedge x = 0 \quad (2)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \wedge x \neq 0 \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \wedge x = 0 \quad (4)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \wedge x \neq 0 \quad (3)$$

تست



نقیض گزاره "همهٔ ریاضی‌دانانی که فیزیک‌دان نیستند، استعداد خوبی در شطرنج دارند" کدام است؟

(۱) ریاضی‌دانی وجود دارد که با اینکه فیزیک‌دان است، استعداد خوبی در شطرنج دارد.

(۲) ریاضی‌دانی وجود دارد که با اینکه فیزیک‌دان نیست، استعداد خوبی در شطرنج ندارد.

(۳) فیزیک‌دانی وجود دارد که ریاضی‌دان نیست، اما استعداد خوبی در شطرنج دارد.

(۴) همهٔ ریاضی‌دانانی که فیزیک‌دان نیستند، در شطرنج استعداد خوبی ندارند.

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

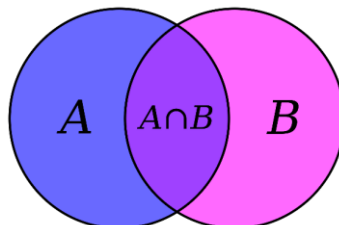
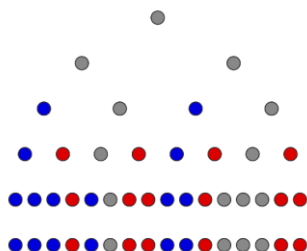
www.Emkan.app





# مجموعه - زیر مجموعه

## آشنایی با مبانی ریاضیات



### تعریف مجموعه

یک دسته از اشیا معانی که صورت کامل، معین مشخص

شده که قابل ذکر است

۱) اعداد دو رقمی بزرگتر از ۳  
۲) ده فیزیکی که در تاریخ

یک دسته از اشیا متمایز که بصورت کامل معین مشخص شده اند و قابل ذکر است.

✓ اعداد دو رقمی بخش پذیر بر 3

✗ ده فیزیکی که در تاریخ

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





نکته



- نمایش مجموعه ها با حروف بزرگ  $A, B, C, \dots$
- ترتیب و تکرار اعضا بی تاثیرند.
- تعداد عضو های مجموعه بصورت  $n(C)$
- عضویت با  $a \in A$  و عدم عضویت با  $b \notin B$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

نمایش مجموعه ها



سه راه معمول برای نمایش مجموعه ها داریم.

1. استفاده از تعریف آن:  
مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از 6
2. مشخص کردن اعضا  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. ضابطه تعریف با استفاده از ویژگی مشترک  
 $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 5\}$

نکته



$$A = \{x \in U | P(x) \equiv T\}$$

مجموعه مرجعی در هر مجموعه وجود دارد.

$$B = \{2x - 1 | x \in \{1, 2, 3\}\}$$

مجموعه مرجع در بعضی موارد توسط عبارت مشخص نشده و خودمان آن را مشخص می کنیم.

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





نکته



طبیعی  $\mathbb{N}$  شامل *Prime, Odd, Even*

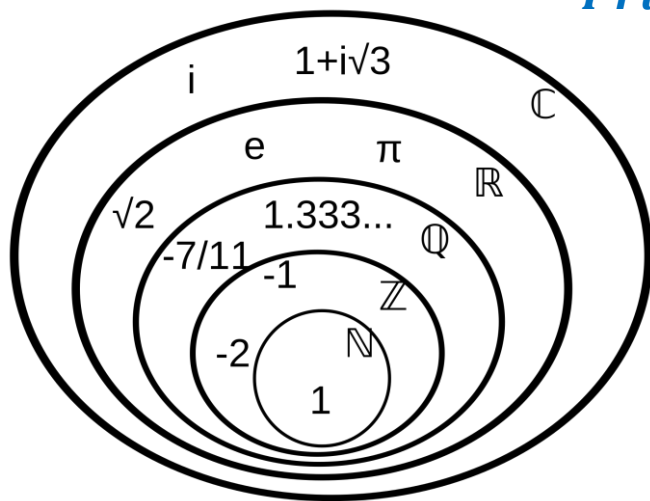
حسابی  $\mathbb{W}$

صحیح  $\mathbb{Z}$

گویا  $\mathbb{Q}$  (بجز بر 0)

گنگ  $\mathbb{Q}'$

حقیقی  $\mathbb{R}$



نکته



به هر مجموعه که تمامی اعضا آن در  $A$  باشند، زیرمجموعه  $A$  گوئیم.

اگر  $n(A) = N$  تعداد  $2^N$  زیر مجموعه داریم.

زیرمجموعه های شامل  $a$  عضو و فاقد  $b$  عضو  $2^{N-a-b}$

زیر مجموعه های سره به زیر مجموعه های گوئیم که غیر مساوی با خود مجموعه است.

$$(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

1 زیرمجموعه تهی و 1 زیرمجموعه خود مجموعه





اگر  $A = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  و  $C = \{\{1, 2\}\}$  باشند، آنگاه کدام دسته از روابط زیر همگی درست هستند؟

- (۱)  $B \subseteq C$  و  $B \in A$ ,  $B \subseteq A$       (۲)  $B \not\subseteq C$  و  $B \in A$ ,  $B \subseteq A$   
 (۳)  $B \not\subseteq C$  و  $B \notin A$ ,  $B \subseteq A$       (۴)  $B \not\subseteq C$  و  $B \in A$ ,  $B \not\subseteq A$



اگر  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$  باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- (الف) تمام اعضای  $A$ ، زیرمجموعه‌ای از آن نیز هستند.  
 (ب) تمام زیرمجموعه‌های  $A$ ، عضوی از آن نیز هستند.  
 (پ) از میان هر دو عضو دلخواه  $A$ ، یکی قطعاً زیرمجموعه دیگری است.

- (۱) هیچ      (۲) ۱  
 (۳) ۲      (۴) ۳



مجموعه بدون عضو را تهی گوئیم.  $\emptyset$  or  $\{\}$   
 مجموعه  $\{\emptyset\}$  یک مجموعه تک عضوی است.  
 به مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $A$ ، مجموعه توانی  $A$  می‌گوئیم و آن را با  $P(A)$  نمایش می‌دهیم.  

$$n(A) = N \Rightarrow n(P(A)) = 2^N$$
 مجموعه توانی  $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$  را بنویسید.



اگر با افزودن ۲ عضو به یک مجموعه  $k$  عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۹۶ واحد افزایش یابد، آنگاه یک مجموعه  $k + ۱$  عضوی چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

۲۸ (۴)

۲۱ (۳)

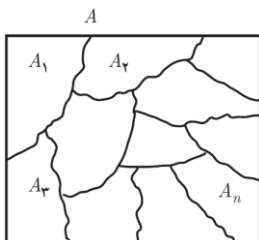
نکته



تعداد زیر مجموعه های  $r$  عضوی مجموعه  $n$  عضوی

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تعداد زیر مجموعه های تک عضوی برابر  $n$  است.



افراز یک مجموعه



مجموعه  $A \neq \emptyset$  و زیر مجموعه های  $A_1, \dots, A_n$  از آن را داریم.  
مجموعه  $A$  به  $n$  زیرمجموعه  $A_1, \dots, A_n$  افراز شده است، هرگاه:

$$I) \forall 1 \leq i \leq n; A_i \neq \emptyset$$

$$II) \forall i, j (i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset)$$

$$III) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$$



چند افراز از مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  می‌توان نوشت، به طوری که  $a$  فقط در زیرمجموعه‌های دو عضوی حضور داشته باشد؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)



مجموعه  $A = \{3, 7, 10, 12, 15\}$  را در نظر بگیرید. اگر  $\{3, 7, x - 2\}$  و  $\{15, y + 5\}$  یک افراز برای  $A$  باشد، آنگاه بیشترین مقدار  $xy$  کدام است؟

۷۸ (۲)

۷۰ (۱)

۸۸ (۴)

۸۴ (۳)

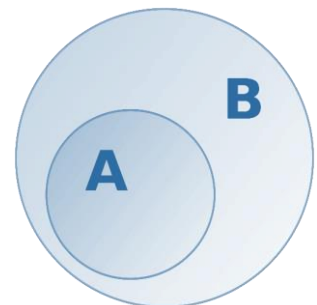
تعریف زیر مجموعه به کمک نماد ریاضی



اگر هر عضو  $A$  عضوی از  $B$  باشد،  $A$  زیرمجموعه  $B$  بوده و می‌نویسیم:  $A \subseteq B$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x: (x \in A \wedge x \notin B)$$







## عضوگیری دلخواه



اگر بخواهیم ثابت کنیم  $A \subseteq B$  و اعضای  $A$  و  $B$  در دسترس نباشند، می‌توانیم عضوی دلخواه از  $A$  مانند  $x$  را فرض کنیم و ثابت کنیم در  $B$  است.

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$$

$$\forall A \subseteq U; \emptyset \subseteq A$$

## متمم یک مجموعه



متمم مجموعه  $A$  برابر با مجموعه اعضای  $U$  است که متعلق به مجموعه  $A$  نباشند و آن را با  $A'$  نمایش می‌دهیم.

$$A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

با استفاده از تعریف بالا نشان دهید:

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

## مجموعه متناهی و نامتناهی



مجموعه‌ای که  $n(A)$  عددی حسابی باشد متناهی و در غیر اینصورت نامتناهی است.

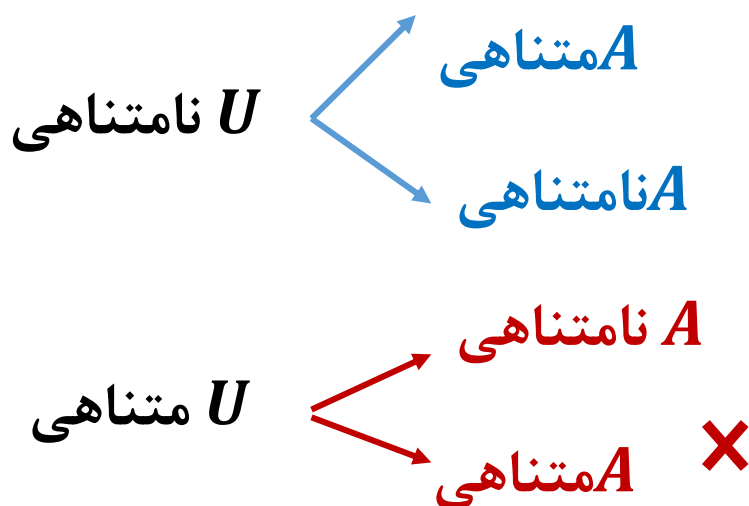
یکی از دو مجموعه متناهی  $A \cap B$  متناهی

یکی از دو مجموعه نامتناهی  $A \cup B$  نامتناهی





شرایط متمم  $A$



دو مجموعه مساوی



دو مجموعه مساوی اند اگر  $A$  و  $B$  کاملاً مثل هم باشند. (هر عضو یکی در دیگری باشد.)

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$





تست



اگر دو مجموعه  $A = \{\{a\}, \{b+1, c-3\}, 5\}$  و  $B = \{a+1, \{b-2\}, \{7, 2\}\}$  برابر باشند، حاصل  $a+b+c$  کدام است؟

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

تست



دو مجموعه  $A = \{1, 2\}$  و  $B = \{m, m^2 + m, -m^2 + 2m\}$  مساوی یکدیگرند.  $m$  چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

صفر (۴)

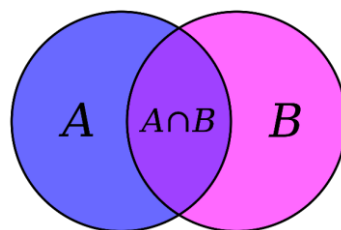
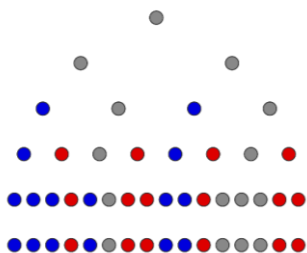
۳ (۳)





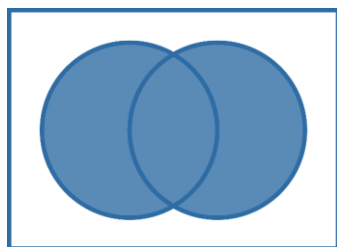
# قوانین و اعمال بین مجموعه ها

## آشنایی با مبانی ریاضیات



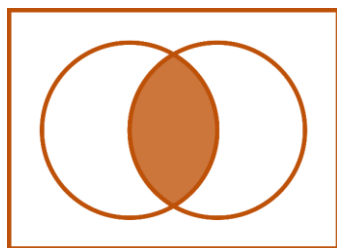
## اعمال مجموعه ها

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \vee x \in B\} \\ \bigcup_{i=1}^n A_i &= A_1 \cup \dots \cup A_n \\ A \cap B &= \{x | x \in A \wedge x \in B\} \\ \bigcap_{i=1}^n A_i &= A_1 \cap \dots \cap A_n \end{aligned}$$



$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n$$



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n$$

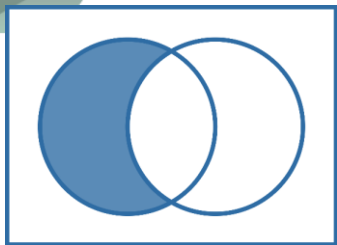
سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app

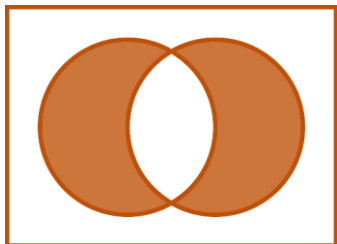




اعمال مجموعه ها

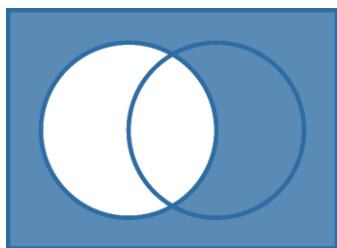


$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



تفاضل متقارن (دلتا)

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



اعمال مجموعه ها



$$A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

قوانین اساسی

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$(A')' = A$$

$$\emptyset' = U$$

$$U' = \emptyset$$

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app

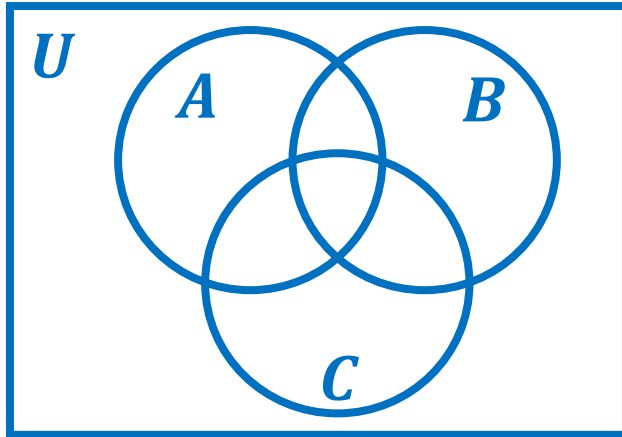




## روش شماره گذاری ناحیه ها



مجموعه  $(A - B') \cap (C' \cap A)$  را نشان دهید.



تست



اگر  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ ،  $B = \{5, 6, \dots, 15\}$  و  $C = \{9, 10, \dots, 20\}$  باشد،  
آنگاه کدامیک از مجموعه‌های زیر، تعداد اعضای بیشتری دارد؟

$$(A \cup B) - C \quad (۲)$$

$$A - (B \cup C) \quad (۱)$$

$$(A - B) \cup (C - B) \quad (۴)$$

$$(A \cap B) - C \quad (۳)$$

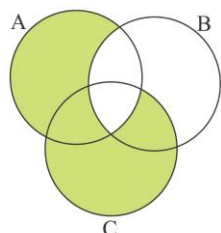




تست



ناحیه‌ها شورخورده در شکل زیر، معادل کدامیک از مجموعه‌های زیر است؟



$$(A \cup B \cup C) - (A \cup C) \quad (1)$$

$$[A - (B \cup C)] \cup (B - A) \quad (2)$$

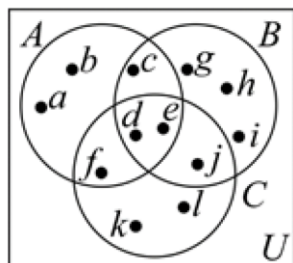
$$(A - B) \cup (C - A) \quad (3)$$

$$(A \cup B) - (A \cap B \cap C) \quad (4)$$

تست



باتوجه به نمودار ون زیر، تعداد اعضای کدامیک از مجموعه‌های زیر بیشتر از سایرین است؟



$$B \cup (A \cap C) \quad (1)$$

$$A \cup (B \cap C) \quad (2)$$

$$C \cup (A \cap B) \quad (3)$$

$$C \cap (A \cup B) \quad (4)$$





## قوانین اساسی



$$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$$

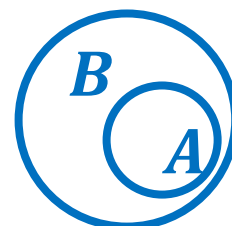
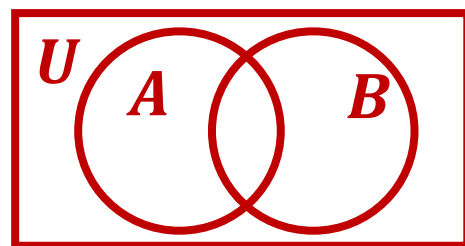
$$(A \cap B) \subseteq B$$

$$A \subseteq (A \cup B)$$

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B) = A$$

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cup B) = B$$

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A - B) = \emptyset$$



$$B - A = B$$

$$A - B = A$$

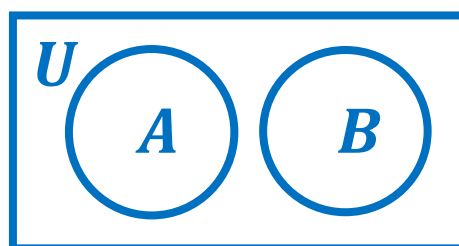
$$B \subseteq A'$$

$$A \subseteq B'$$

$$A - A' = A$$

$$A' - A = A'$$

## مجموعه‌های جدا از هم







## قوانین مجموعه ها



$$\begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subseteq B \cup D \\ A \cap C \subseteq B \cap D \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subseteq B \cup C \\ A \cap C \subseteq B \cap C \end{cases}$$

$$(B \subseteq A) \wedge (B \subseteq A') \Rightarrow \dots$$

$$(B \cap B) \subseteq (A \cap A') \Rightarrow B = \emptyset$$

$$(A \subseteq B) \wedge (A' \subseteq B) \Rightarrow \dots$$

$$(A \cup A') \subseteq (B \cup B) \Rightarrow B = U$$

## خاصیت جابجایی و شرکت پذیری

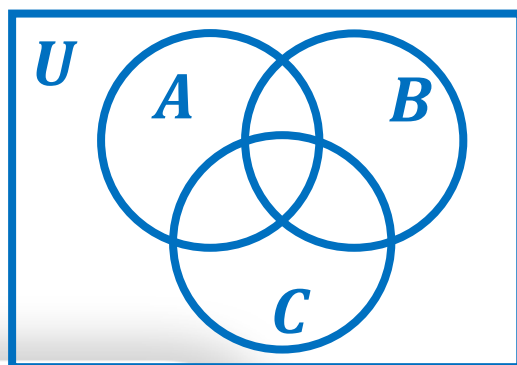


$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$



سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور



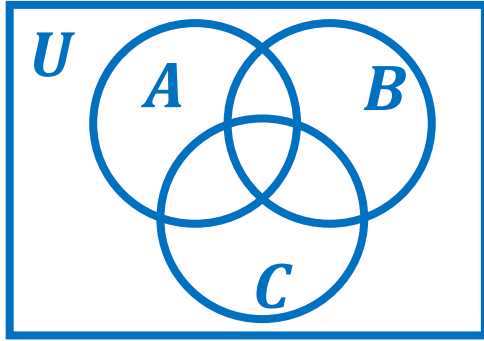
## خاصیت توزیع پذیری (پخشی)



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

عکس پخشی فاکتورگیری است.



## خاصیت دمورگان و جذب



قوانین دمورگان

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

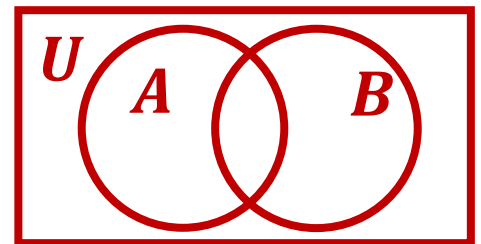
قوانین جذب (همپوشانی)

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

تبدیل تفاضل به اشتراک

$$A - B = A \cap B'$$





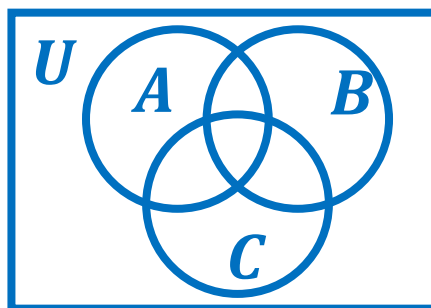
جبر مجموعه ها



برابری دو مجموعه

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$$

$$\begin{cases} A \cup C = B \cup C \\ A \cap C = B \cap C \end{cases} \Rightarrow A = B$$



تعداد اعضای مجموعه

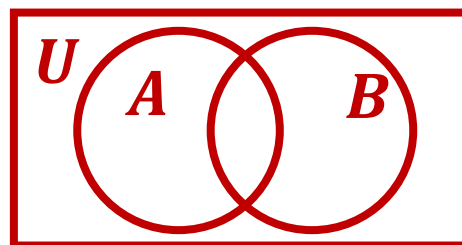


$$n(A') = n(U) - n(A)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$



سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkan.app





تست



اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه مجموعه دلخواه باشند، حاصل عبارت  $(A - B) \cup [(A \cap C) - B]$  همواره برابر کدام است؟

$$A - B \quad (۲)$$

$$A \quad (۱)$$

$$A \cup B \quad (۴)$$

$$B' \quad (۳)$$

تست



اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  مجموعه‌هایی دلخواه باشند، حاصل  $(A - (B \cup C)) \cup (A \cap (B - C))$  کدام است؟

$$A - C \quad (۲)$$

$$A - B \quad (۱)$$

$$C - B \quad (۴)$$

$$B - A \quad (۳)$$

زوج مرتب



هر دو شیئی مانند  $x$  و  $y$ ، تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم به آن زوج مرتب می‌گوییم و با  $(x, y)$  نمایش می‌دهیم.

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (a, b)$$

$\{a, b\}$  یک مجموعه دو عضوی است.

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app



## ضرب دکارتی بین دو مجموعه



اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، حاصل ضرب دکارتی  $A \times B$  زوج مرتب هایی است که مولفه اول از  $A$  و مولفه دوم از  $B$  است:

$$A \times B = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

$$A = \{1, 2\}$$

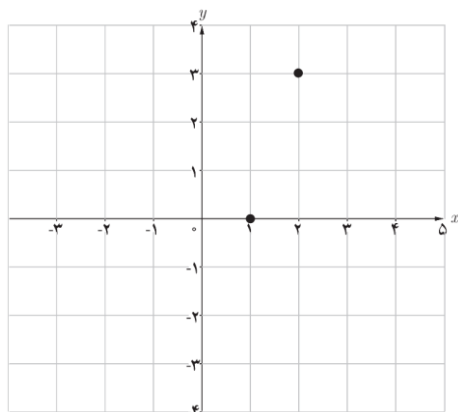
$$B = \{3, 6\}$$

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6)\}$$

## نمودار ضرب دکارتی



اگر دو مجموعه  $n$  عضوی و  $m$  عضوی داشته باشیم،  $A \times B$  از  $nm$  زوج مرتب (نقطه) تشکیل شده است.



$$A = \{-1, 1, 2\}$$

$$B = \{-2, 0, 4\}$$

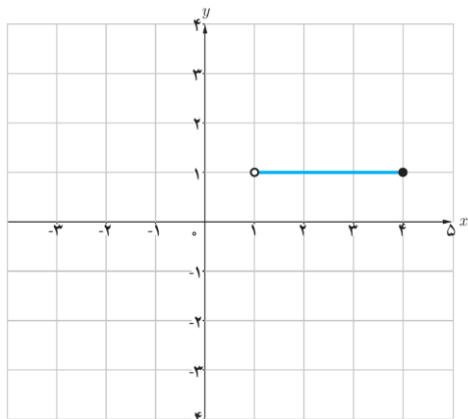




## نمودار ضرب دکارتی



اگر  $A$  یک بازه و  $B$  یک مجموعه  $m$  عضوی باشد،  $A \times B$  از  $m$  پاره خط افقی تشکیل شده است.



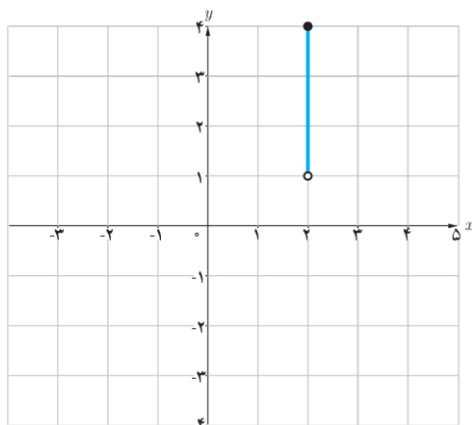
$$A = (1, 4]$$

$$B = \{-3, 1, 2\}$$

## نمودار ضرب دکارتی



اگر  $A$  یک بازه و  $B$  یک مجموعه  $m$  عضوی باشد،  $B \times A$  از  $m$  پاره خط عمودی تشکیل شده است.



$$A = \{-3, 1, 2\}$$

$$B = (1, 4]$$





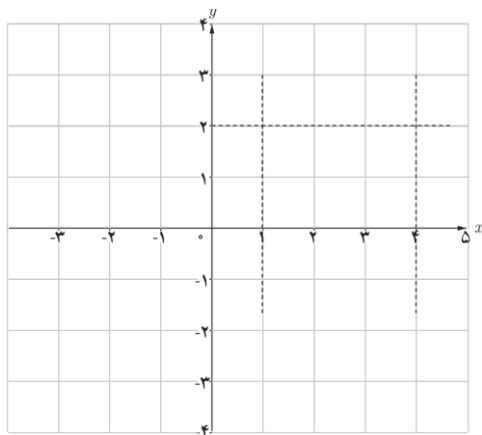
## نمودار ضرب دکارتی



اگر  $A$  و  $B$  هر دو بازه باشند، نمودار ما یک سطح است. اگر انتهای بسته خط ممتد و اگر باز باشد، در اضلاع خط چین داریم.

$$A = (1, 4]$$

$$B = [-2, 2)$$





## قضایای ضرب دکارتی



در حالت کلی  $A \times B$  و  $B \times A$  تفاوت دارند:

$$A = \{-1\}, B = \{-2\}$$

$$A \times B = \{(-1, 2)\}, B \times A = \{(2, -1)\}$$

تعداد عضوهای  $A \times B$  برابر است با:

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

$$n(A \times B) = n(B \times A)$$

ضرب  $A$  در خودش بصورت زیر است:

$$A \times A = A^2$$

## قضایای ضرب دکارتی



$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$$

$$n(A \times \emptyset) = n(\emptyset \times B) = 0$$

در برابری دو ضرب دکارتی داریم:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \dots$$

$$(A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$$







اگر  $A = \{-۸, ۴b + ۳, b^۲\}$  ،  $B = \{۴, -۵, ۳a + ۱\}$  ،  $C = [۲a, b + ۳]$  ،  $A \times B = B \times A$  باشد، آنگاه مساحت نمودار مجموعه  $C^۲$  کدام است؟

۳۶ (۲)

۲۵ (۱)

۶۴ (۴)

۴۹ (۳)

## قضایای ضرب دکارتی



اعمال روی ضرب دکارتی خاصیت پخشی دارند:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

به روابط زیر نیز دقت کنید (رابطه اول برای هر سه عملیات برقرار است):

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$(B \cup C) \times A \neq A \times (B \cup C)$$

$$(A \times B) \cup (C \times A) \neq A \times (B \cup C)$$



اگر  $A = [۱, ۴]$  و  $B = (-۱, ۳]$  باشند، مساحت نمودار  $A \times A - B \times B$  در صفحه مختصات، کدام است؟

۵ (۲)

۴ (۱)

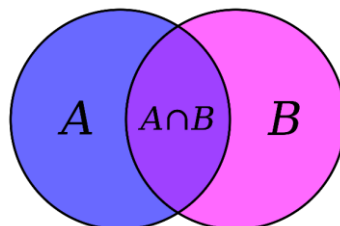
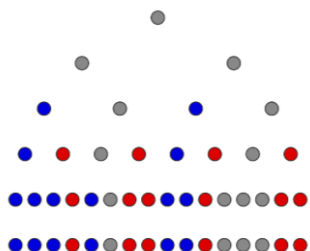
۶ (۴)

۷ (۳)



# حل تمرین

## آشنایی با مبانی ریاضیات



مجموعه  $n$  عضوی  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  مفروض است. اگر تعداد زیرمجموعه‌های  $2$  عضوی و  $8$  عضوی مجموعه  $A$  برابر باشد، در چند زیرمجموعه از  $A$  کوچک‌ترین عضو مضربی از  $4$  است؟

۶۸ (۲)

۶۴ (۱)

۱۳۶ (۴)

۱۲۸ (۳)



اگر ارزش گزاره  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$  نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدامیک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

$(p \vee q) \wedge r$  (۲)

$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$  (۱)

$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$  (۴)

$(p \vee \sim q) \vee r$  (۳)



تست

اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه مجموعه دلخواه باشند، آنگاه چه تعداد از روابط زیر همواره صحیح است؟

(الف)  $A - B = \emptyset \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

(ب)  $A \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A = B$

(پ)  $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$

(۲) ۱

(۱) هیچ

(۴) ۳

(۳) ۲



تست

چند افراز متمایز از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  وجود دارد که شامل یک مجموعه ۳ عضوی باشد؟

(۲) ۱۰

(۱) ۵

(۴) ۲۰

(۳) ۱۵



تست

تعداد افرازهای مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، که شامل فقط یک مجموعه تک عضوی باشد، کدام است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۵

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





تست



گزاره  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ ، هم‌ارز منطقی با کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

$p \vee q$  (۲)

$p \wedge q$  (۱)

$p \Rightarrow \sim q$  (۴)

$p \Rightarrow q$  (۳)

تست



در مورد گزاره  $p \wedge (\sim p \vee q)$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱) همیشه درست است.

(۲) همیشه نادرست است.

(۳) با گزاره  $p \wedge q$  هم‌ارز منطقی است.

(۴) با گزاره  $p \wedge \sim q$  هم‌ارز منطقی است.

تست



اگر مجموعه  $A$  دارای ۵ عضو و مجموعه  $B$  دارای ۶ عضو و مجموعه  $A \cap B$  دارای ۲ عضو باشند، مجموعه  $(A \cap B') \times (A \cup B)'$ ، چند عضو دارد؟

$10$  (۲)

$8$  (۱)

$155$  (۴)

$12$  (۳)

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





تست



اگر  $(A \cup B) \cap B \subseteq C$  باشد، حاصل  $(B \cap C) \cup (B' \cup C)' \cup (C - B)$  کدام است؟

A (۲)

B (۱)

B' (۴)

C (۳)

تست



مجموعه اعداد اول  $(P)$  را به سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  افراز کرده ایم.  $A = \{x \in P \mid x = 6k - 1, k \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{x \in P \mid x = 6k + 1, k \in \mathbb{N}\}$  باشند، آنگاه کدام یک از رابطه های زیر نادرست است؟

$\{5, 11, 17\} \subseteq A$  (۲)

$\{2\} \subseteq C - A$  (۱)

$\{3, 13, 43\} \subseteq B$  (۴)

$A - B = A - C$  (۳)

تست



اگر  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^2 < 65\}$ ،  $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 9x + 20 = 0\}$  و مجموعه  $(A - B) \times B$  دارای ۲۰ عضو باشد، مجموعه  $(A' - B') \times A$  دارای چند عضو است؟

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

۳۰ (۴)

۲۴ (۳)





تست



اگر  $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |2 - x^2| \leq 6\}$  و  $B = \{x | x \in \mathbb{N}, |x - 3| \leq 4\}$ ، آنگاه مجموعه  $(A \times B) \cap (B \times A)$  چند عضو دارد؟

۶ (۲)

۴ (۱)

۱۶ (۴)

۹ (۳)

تست



در جدول ارزش سه گزاره  $p$ ،  $q$  و  $r$ ، در چند حالت ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$  نادرست است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

تست



تعداد افرازهای مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  که شامل فقط یک مجموعه دو عضوی باشد، کدام است؟

۴۵ (۲)

۳۰ (۱)

۹۰ (۴)

۶۰ (۳)

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkan.app





ساده شده عبارت  $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$  کدام است؟

$$\sim q \quad (۲)$$

$$\sim (p \wedge q) \quad (۱)$$

$$\sim p \quad (۴)$$

$$p \vee q \quad (۳)$$





# آمار و احتمال

امیر سلیمانی  
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی



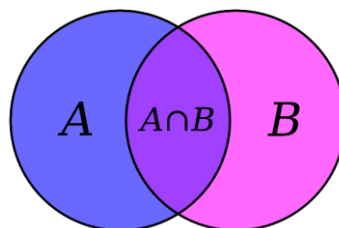
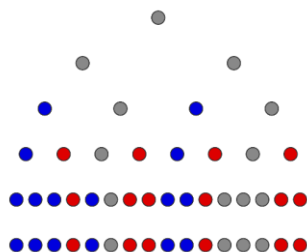


این مجموعه همراه تدریس ویدیویی دوره  
آموزشی سامانه امکان می باشد و به تنهایی  
قابل استفاده و بهینه نمی باشد



# حل تمرین

## آشنایی با مبانی ریاضیات



تست



مجموعه  $n$  عضوی  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  مفروض است. اگر تعداد زیرمجموعه‌های  $2$  عضوی و  $8$  عضوی مجموعه  $A$  برابر باشد، در چند زیرمجموعه از  $A$  کوچک‌ترین عضو مضربی از  $4$  است؟

۶۸ (۲)

۶۴ (۱)

۱۳۶ (۴)

۱۲۸ (۳)

تست



اگر ارزش گزاره  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$  نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدامیک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

$(p \vee q) \wedge r$  (۲)

$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$  (۱)

$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$  (۴)

$(p \vee \sim q) \vee r$  (۳)

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه مجموعه دلخواه باشند، آنگاه چه تعداد از روابط زیر همواره صحیح است؟

(الف)  $A - B = \emptyset \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

(ب)  $A \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A = B$

(پ)  $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$

(۲) ۱

(۱) هیچ

(۴) ۳

(۳) ۲



چند افراز متمایز از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  وجود دارد که شامل یک مجموعه ۳ عضوی باشد؟

(۲) ۱۰

(۱) ۵

(۴) ۲۰

(۳) ۱۵



تعداد افرازهای مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، که شامل فقط یک مجموعه تک عضوی باشد، کدام است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

(۴) ۲۰

(۳) ۱۵





تست



گزاره  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ ، همارز منطقی با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

$$p \vee q \quad (۲)$$

$$p \wedge q \quad (۱)$$

$$p \Rightarrow \sim q \quad (۴)$$

$$p \Rightarrow q \quad (۳)$$

تست



در مورد گزاره  $p \wedge (\sim p \vee q)$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱) همیشه درست است.

(۲) همیشه نادرست است.

(۳) با گزاره  $p \wedge q$  همارز منطقی است.

(۴) با گزاره  $p \wedge \sim q$  همارز منطقی است.

تست



اگر مجموعه  $A$  دارای ۵ عضو و مجموعه  $B$  دارای ۶ عضو و مجموعه  $A \cap B$  دارای ۲ عضو باشند، مجموعه  $(A \cap B') \times (A \cup B)'$ ، چند عضو دارد؟

$$۱۰ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

$$۱۵۵ \quad (۴)$$

$$۱۲ \quad (۳)$$

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





تست

اگر  $(A \cup B) \cap B \subseteq C$  باشد، حاصل  $(B \cap C) \cup (B' \cup C)' \cup (C - B)$  کدام است؟

A (۲)

B (۱)

B' (۴)

C (۳)



تست

مجموعه اعداد اول  $(P)$  را به سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  افراز کرده ایم.  $A = \{x \in P \mid x = 6k - 1, k \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{x \in P \mid x = 6k + 1, k \in \mathbb{N}\}$  باشند، آنگاه کدام یک از رابطه های زیر نادرست است؟

$\{5, 11, 17\} \subseteq A$  (۲)

$\{2\} \subseteq C - A$  (۱)

$\{3, 13, 43\} \subseteq B$  (۴)

$A - B = A - C$  (۳)



تست

اگر  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^2 < 65\}$ ،  $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 9x + 20 = 0\}$  و مجموعه  $(A - B) \times B$  دارای ۲۰ عضو باشد، مجموعه  $(A' - B') \times A$  دارای چند عضو است؟

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

۳۰ (۴)

۲۴ (۳)



تست



اگر  $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |2 - x^2| \leq 6\}$  و  $B = \{x | x \in \mathbb{N}, |x - 3| \leq 4\}$ . آنگاه مجموعه  $(A \times B) \cap (B \times A)$  چند عضو دارد؟

۶ (۲)

۴ (۱)

۱۶ (۴)

۹ (۳)

تست



در جدول ارزش سه گزاره  $p$ ،  $q$  و  $r$ ، در چند حالت ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$  نادرست است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

تست



تعداد افزایهای مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  که شامل فقط یک مجموعه دو عضوی باشد، کدام است؟

۴۵ (۲)

۳۰ (۱)

۹۰ (۴)

۶۰ (۳)

تست



ساده شده عبارت  $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$  کدام است؟

$\sim q$  (۲)

$\sim (p \wedge q)$  (۱)

$\sim p$  (۴)

$p \vee q$  (۳)



# آمار و احتمال

امیر سلیمانی  
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی



این مجموعه همراه تدریس ویدیویی دوره  
آموزشی سامانه امکان می باشد و به تنهایی  
قابل استفاده و بهینه نمی باشد



# یادآوری شمارش و مبانی احتمال

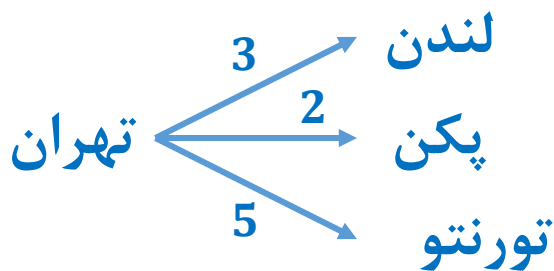
## احتمال



## اصل جمع



اگر کاری را بتوان به  $k$  روش مجزا انجام داد، به طوری که برای روش اول  $k_1$ ، برای روش دوم  $k_2$ ، ... و برای روش  $n$  ام  $k_n$  راه وجود داشته باشد، در مجموع برای انجام این کار  $k_1 + \dots + k_n$  راه داریم.





## اصل ضرب



اگر کاری را بتوان به  $k$  مرحله داشته باشد و مراحل از هم مستقل باشند، به طوری که برای مرحله اول  $k_1$ ، برای مرحله دوم  $k_2$ ، ...، و برای مرحله  $n$  ام  $k_n$  راه وجود داشته باشد، در مجموع برای انجام این کار  $k_1 \times \dots \times k_n$  راه داریم.

نیویورک  $\xrightarrow{5}$  بارسلون  $\xrightarrow{2}$  دبی  $\xrightarrow{3}$  تهران

## جایگشت



اگر چند شی متمایز داشته باشیم، هر چینی از آن‌ها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا می‌نامیم.

تعداد جایگشت  $n$  شی برابر است با:

$$n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

اگر ترتیب خاصی بین  $r$  تا از آنها باشد  $n!/r!$  حالت داریم.

$$A = \{Chandler, Monica, Ross\}$$

$$C, M, R \quad M, R, C$$

$$C, R, M \quad R, C, M$$

$$M, C, R \quad R, M, C$$





## ترتیب



تعداد جایگشت های  $r$  تایی از  $n$  شی متمایز (یعنی همان تعداد انتخاب های  $r$  شی از میان  $n$  شی متمایز که ترتیب قرار گرفتن در آن مهم باشد ترتیب  $r$  از  $n$  گوییم و برابر است با:  $(n \geq r)$ )

$$P(n, r) = (n)_r = P_r^n$$

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

12 حالت می توان کاپیتان و دروازه بان یک تیم 4 نفره را انتخاب کرد.

## ترکیب



تعداد انتخاب های  $r$  شی از  $n$  شی متمایز که در آن ترتیب انتخاب، اهمیت نداشته باشد (به عبارتی زیر مجموعه های  $r$  عضوی مجموعه  $n$  عضوی ترکیب  $r$  از  $n$  گوییم و داریم  $(n \geq r)$ ):

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = C_r^n$$

$$[n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)]/r! = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

15 حالت می توان دو بازیکن یک تیم 6 نفره را انتخاب کرد.





## ترکیب های پرتکرار



$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

## تعریف احتمال و آمار



### آمار



?



شناخت جامعه نامعلوم با کمک از نمونه  
جمع آوری شده



?

بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه  
معلوم

### احتمال

## پدیده تصادفی



به پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن یا مشاهده را قبل از رخ دادن آن نمی توان  
مشخص نمود، پدیده های تصادفی می گویند.

✓ برنده شدن در لاتاری

به مجموعه همه نتیجه های ممکن پدیده تصادفی نیز، فضای نمونه ( $S$ ) آن  
می گویند.

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور





## برآمد و پیشامد



هر عضو فضای نمونه را «برآمد» می‌گویند.

بر هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک «پیشامد» گوییم.

معمولا هدف بدست آوردن احتمال پیشامد

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$B$  در اینجا پیشامدی از  $A$  است.

## پیشامد هم شانس



اگر فضای نمونه  $S$  یک آزمایش و پیشامد  $A$  از آن را داشته باشیم و احتمال رخ دادن همه برآمدها یکسان باشد (فضای نمونه هم شانس باشد)، احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

احتمال اینکه ریک به از بین کهکشان های  $A1$  تا  $A234$  به یکی سفر کند، چقدر است؟

## تست



از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی تنها بر یک عدد از بین اعداد ۲ و ۵ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

سامانه امتحان : امورس مجاری محدود





یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می‌کنیم. احتمال روشن شدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

$$\frac{41}{108} \quad (2)$$

$$\frac{31}{72} \quad (4)$$

$$\frac{13}{36} \quad (1)$$

$$\frac{91}{216} \quad (3)$$

### تشخیص فضای نمونه



در صورتی که آزمایش متشکل از  $n$  آزمایش با فضاهای نمونه  $S_1, \dots, S_n$  باشد، فضای نمونه این آزمایش  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  می‌باشد.

☑ بازیگران برنده اسکار سال 2021

$$S_{BAActor} \times S_{BAActress} \times S_{BSActor} \times S_{BSActress}$$

$$n(S) = n(S_1) \times n(S_2) \times \dots \times n(S_n)$$



در یک رستوران ۵ نوع غذای خورشتی، ۲ نوع سالاد، ۳ نوع دسر و ۳ نوع نوشیدنی سرو می‌شود. شخصی به این رستوران مراجعه می‌کند، اگر بخواهد یک نوع غذا، یک نوع سالاد یا دسر و یک نوع نوشیدنی سفارش دهد، فضای نمونه در چنین پدیده‌ای چند حالت دارد؟

$$19 \quad (2)$$

$$90 \quad (4)$$

$$13 \quad (1)$$

$$75 \quad (3)$$

## اصول احتمال



برای هر پیشامد  $A$  که احتمال  $P(A)$  را دارد اصول احتمال عبارت اند از:

1.  $P(A) \in [0, 1]$

2.  $P(S) = 1$

3.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

## متمم و تفاضل دو پیشامد

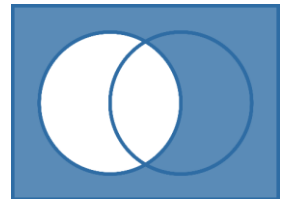


متمم پیشامد  $A$  را با  $A'$  یا  $A^c$  نمایش داده و وقتی رخ میدهد که پیشامد  $A$  رخ ندهد.

$$A \cup A' = S$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$



پیشامد  $A - B$  وقتی رخ می دهد که  $A$  رخ بدهد ولی  $B$  رخ ندهد.  
 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

## تست



اگر  $P(B - A) = P(A)$  و  $P(A \cup B) = 5/8$  باشد، احتمال متمم پیشامد  $A$  کدام است؟

۲)  $5/5$

۱)  $4/5$

۴)  $7/5$

۳)  $6/5$



## اشتراک و اجتماع پیشامدها

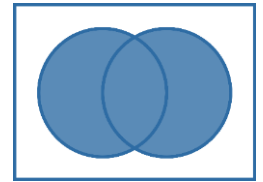


اشتراک  $n$  پیشامد یعنی وقتی که همگی آن‌ها رخ بدهند.

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n$$

اجتماع  $n$  پیشامد زمانی اتفاق می‌افتد که حداقل یکی از پیشامدها رخ بدهد.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n$$



$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



تست

اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، به‌طوری‌که  $P(A) = ۰/۶$  و  $P(B) = ۰/۷$  و  $P(A \cap B') = ۰/۲$  باشند، آنگاه  $P(A' \cap B)$  کدام است؟

۰/۳ (۲)

۰/۱ (۱)

۰/۵ (۴)

۰/۴ (۳)







در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد ظاهر شده عددی مربع کامل است. احتمال آنکه عدد تاس اول بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشد، کدام است؟

$$\frac{4}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{7} \quad (۳)$$



دو سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه "رو" یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

$$\frac{5}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۳)$$

## دو پیشامد ناسازگار



اگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  از فضای نمونه  $S$  بوده و داشته باشیم  $A \cap B = \emptyset$  دو پیشامد را ناسازگار می‌گوییم.

پیشامد ناسازگار هیچ‌گاه با هم رخ نمی‌دهند.

اگر  $n$  پیشامد دو به دو ناسازگار باشند، به آنها  $n$  پیشامد ناسازگار می‌گوییم.



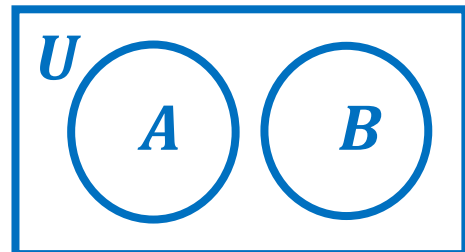


## پیشامد ناسازگار



اگر  $n$  پیشامد ناسازگار داشته باشیم، پیشامد آن بصورت روبروست:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$



$$B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

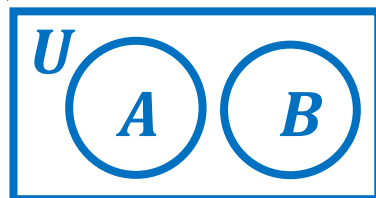
$$B \subseteq A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$$

## متمم پیشامد ناسازگار

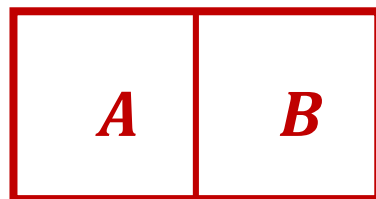


اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار بوده و تهی نباشند، راجع به  $A'$  و  $B'$  دو حالت داریم:

$$(A \neq B') \Rightarrow \text{متمم سازگار}$$



$$(A = B') \Rightarrow \text{متمم ناسازگار}$$





از بین مضارب دورقمی عدد ۳، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد انتخاب شده بر ۷ بخش پذیر است، ولی زوج نمی‌باشد؟

$$\frac{1}{30} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{33} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{15} \quad (۳)$$



اگر  $P(A \cap B) = 4P(B) = 3P(A)$  و  $P(A \cup B) = 5/8$  باشد، حاصل  $P(A - B)$  کدام است؟

$$\frac{28}{65} \quad (۲)$$

$$\frac{36}{65} \quad (۴)$$

$$\frac{24}{65} \quad (۱)$$

$$\frac{32}{65} \quad (۳)$$





# احتمال غیر هم شانس

احتمال



احتمال هم شانس



می دانیم برای محاسبه احتمال رخداد پدیده هایی که هم شانس هستند (همه برآمدها احتمال وقوع یکسانی دارند) داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

به هر زیرمجموعه تک عضوی از فضای نمونه یک پیشامد ساده می گوییم. معمولاً بجای  $P(\{a\})$  می نویسیم  $P(a)$ .





## احتمال غیر هم‌شانسی



هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه یعنی  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  احتمال نابرابر داشته باشند،  $S$  را فضای نمونه غیرهم‌شانسی می‌گوییم.

قوانین زیر در فضای نمونه غیرهم‌شانسی مانند  $S$  برقرار است (A)

$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  = زیرمجموعه  $k$  عضوی  $S$  است):

$$1. 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2. P(S) = 1 \quad (P(S) = P(s_1) + \dots + P(s_n))$$

$$3. P(A) = P(a_1) + \dots + P(a_k)$$

تست



اگر  $S = \{a, b, c, d, e, f\}$  فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و  $A = \{a, b, c\}$ ،  $B = \{a, c\}$  و  $C = \{a, c, f\}$  سه پیشامد باشند، به‌طوری‌که  $P(A) = \frac{5}{11}$ ،  $P(B) = \frac{1}{4}$  و  $P(C) = \frac{3}{8}$ . آنگاه احتمال پیشامد  $D = \{d, e\}$  کدام است؟

$$\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$\frac{11}{24} \quad (1)$$

$$\frac{5}{24} \quad (3)$$

تست



یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال رخ دادن هر عدد اول، دو برابر احتمال رخ دادن هر عدد مربع کامل است. کدام گزینه نمی‌تواند احتمال رخ دادن عدد یک باشد؟

$$0/11 \quad (2)$$

$$0/10 \quad (1)$$

$$0/13 \quad (4)$$

$$0/12 \quad (3)$$





اگر  $S = \{a, b, c, d\}$  و  $P(a) = 4P(b) = 8P(c) = 2P(d)$  باشد، حاصل  $P(b)$  کدام است؟

$$\frac{2}{15} \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \quad (4)$$

$$\frac{1}{15} \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$



در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال مشاهده کدام عدد ۴۰ درصد احتمال مشاهده نشدن آن است؟

$$3 \quad (2)$$

$$6 \quad (4)$$

$$2 \quad (1)$$

$$5 \quad (3)$$



سه فرد  $a$ ،  $b$  و  $c$  در یک مسابقه شرکت کرده‌اند که تنها یک برنده دارد. اگر احتمال برد  $b$ ، سه برابر  $a$  و احتمال برد  $c$  نصف  $b$  باشد، احتمال اینکه  $a$  یا  $c$  برنده شود، چقدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5}{9} \quad (4)$$

$$\frac{2}{11} \quad (1)$$

$$\frac{5}{11} \quad (3)$$



## تست



در یک تاس ناسالم،  $P(1) = P(2) = \frac{1}{8}$  و  $P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{16}$  در پرتاب این تاس، احتمال اینکه شمارهٔ روشده زوج باشد، چقدر است؟

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| $\frac{17}{32}$ (۱) | $\frac{25}{32}$ (۲) |
| $\frac{16}{32}$ (۳) | $\frac{18}{32}$ (۴) |

## تست



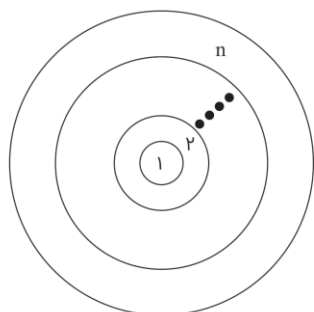
در پرتاب یک چهار وجهی که اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ روی آن حک شده است، احتمال روشن هر وجه متناسب با عکس مجذور عدد روی آن وجه است. احتمال روشن عدد زوج در یک بار پرتاب این چهار وجهی کدام است؟

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| $\frac{9}{41}$ (۱)  | $\frac{3}{41}$ (۲)  |
| $\frac{23}{41}$ (۳) | $\frac{32}{41}$ (۴) |

## تست



در پرتاب یک دایره به یک صفحهٔ دایره‌ای شکل که به  $n$  ناحیهٔ مجزا تقسیم شده است، احتمال اصابت دایره به ناحیهٔ  $k$  ام  $(1 \leq k \leq n)$ ،  $x(2k - 1)$  است. اگر احتمال اصابت دایره به ناحیهٔ دوم  $\frac{1}{12}$  باشد، دایره به چند ناحیه تقسیم شده است؟



- (۱) ۴  
(۲) ۵  
(۳) ۶  
(۴) ۷



تست



یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال آمدن عدد ۲، برابر با  $\frac{1}{3}$  احتمال آمدن هر کدام از اعداد دیگر است. اگر این تاس را پرتاب کنیم، با چه احتمالی عددی غیر اول ظاهر می‌شود؟

$$\frac{7}{16} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{9}{16} \quad (1)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

تست



در یک آزمایش تصادفی  $S = \{a, b, c\}$  فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(\{a, b\}) = \frac{5}{12}$  و  $P(\{a, c\}) = \frac{3}{4}$  باشد، حاصل  $P(a) \times P(b)$  کدام است؟

$$\frac{7}{48} \quad (2)$$

$$\frac{1}{12} \quad (4)$$

$$\frac{1}{24} \quad (1)$$

$$\frac{7}{72} \quad (3)$$







# احتمال شرطی

## احتمال



## احتمال شرطی چیست؟



در اتاقی 15 نفر قرار دارند. یکی از آنها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر این فرد دوست رئیس مافیا باشد، به چه احتمال این فرد عضو مافیا است؟

در احتمال شرطی می‌خواهیم احتمال رخداد یک پیشامد را پیدا کنیم، به شرط آنکه پیشامد دیگری رخ داده باشد.

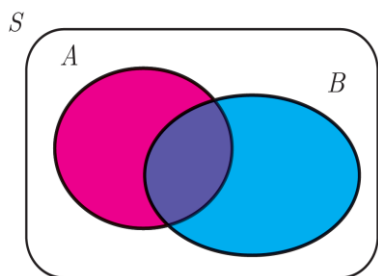




## کاهش فضای نمونه



در حالتی که احتمال هم‌شانسی است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد  $B$  مثل این است که در فضای نمونه  $S$  را کنار گذاشته و فضای نمونه را  $B$  در نظر بگیریم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانسی است.



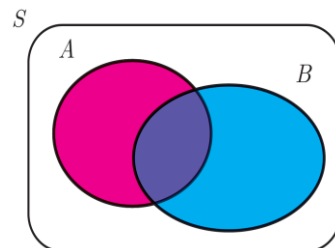
این رویکرد کاهش فضای نمونه نام دارد.

## احتمال شرطی



احتمال رخداد  $A$  به شرطی که پیشامد  $B$  اتفاق افتاده باشد را با  $P(A|B)$  نمایش می‌دهیم و احتمال  $A$  به شرط وقوع  $B$  بصورت زیر است:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$





از میان جایگشت‌های حروف کلمه "تهران"، یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم این کلمه با حرف ت آغاز نشده است، احتمال آنکه حرف دوم آن "ر" باشد، کدام است؟

$$\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{3}{16} \quad (4)$$

$$\frac{1}{16} \quad (3)$$



اگر  $P(B') = \frac{2}{5}$ ،  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$  و  $P(B'|A') = \frac{1}{3}$  باشد،  $P(A)$  کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$





تست



اگر برای دو پیشامد دلخواه A و B داشته باشیم:  $P(B - A) = P(A - B) = \frac{1}{6}$  و احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد برابر با  $\frac{1}{3}$  باشد، آنگاه  $P(B|A)$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

تست



فرض کنید در یک دوره از مسابقات، احتمال اینکه رضا اصلی‌ترین رقیبش را شکست دهد، ۳۰ درصد باشد. احتمال قهرمانی رضا در حال حاضر برابر ۴۰ درصد است و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را شکست دهد، این احتمال به ۶۰ درصد افزایش می‌یابد. احتمال اینکه رضا نه اصلی‌ترین رقیبش را شکست دهد و نه قهرمان شود، چقدر است؟

$$\frac{56}{100} \quad (2)$$

$$\frac{44}{100} \quad (1)$$

$$\frac{52}{100} \quad (4)$$

$$\frac{48}{100} \quad (3)$$

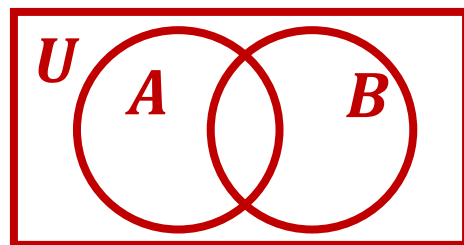
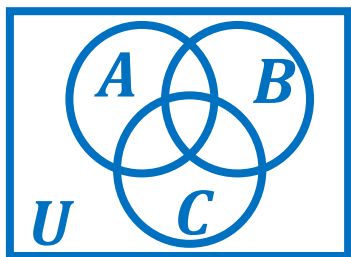


## قانون ضرب احتمال



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

اگر  $A_1, A_2, A_3$  پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، آن گاه:  
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$



## حالت کلی قانون ضرب احتمال



اگر  $n$  پیشامد با احتمال ناصفر  $A_1, \dots, A_n$  داشته باشیم، در این صورت  
 قانون ضرب احتمال به شکل زیر بیان می شود:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$



اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  بوده، به طوری که  $P(A) = 0/2$ ،  $P(B) = 0/5$  و  
 $P(A \cup B) = 0/6$  باشند، حاصل  $\frac{P(B|A)}{P(A' \cup B')}$  کدام است؟

$$\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{9} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$



تست



اعداد طبیعی کوچکتر مساوی صد را روی کارتهایی می‌نویسیم و درون ظرفی قرار می‌دهیم. یک کارت به تصادف برمی‌داریم و کنار می‌گذاریم و به اندازهٔ مجموع ارقام آن، مجدداً از ظرف کارت برمی‌داریم. احتمال آنکه مجموع تمام ارقام کارت‌های برداشته‌شدهٔ جدید برابر با ۱ باشد، کدام است؟

$$\frac{3}{5000} \quad (2)$$

$$\frac{1}{1650} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2500} \quad (4)$$

$$\frac{9}{10000} \quad (3)$$

تست



در جعبه‌ای ۱۰ لامپ موجود است که ۴ تا از آن‌ها معیوب هستند. به تصادف و به‌طور متوالی و بدون جایگذاری این لامپ‌ها را آزمایش کرده تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

$$\frac{4}{27} \quad (4)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$





جعبه‌ای محتوی ۳ مهره آبی، ۵ مهره سبز و ۲ مهره زرد است. سه مهره را به ترتیب و بدون جایگذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره اول سبز و دو مهره دیگر آبی یا مهره اول زرد و دو مهره دیگر سبز باشد، چقدر است؟

$$\frac{19}{200} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{72} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{120} \quad (۴)$$

$$\frac{19}{450} \quad (۳)$$

## قانون احتمال کل



دو کیسه داریم که اولی ۲ گوی سفید و ۵ گوی مشکی و دومی ۳ گوی سفید و ۲ گوی مشکی دارد. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب و گویی از آن برمی‌داریم. به چه احتمال گوی سفید است؟

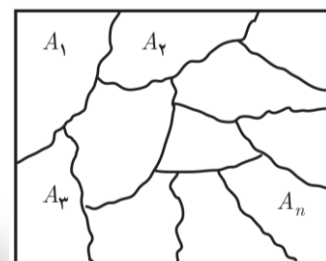
## قانون احتمال کل



فرض کنید  $B_1, \dots, B_n$  پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$  داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$





تست



در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول شش مهره سفید و در ظرف دوم سه مهره سفید است. از اولی هفت مهره و از دومی پنج مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

$$\frac{7}{36} \quad (۲)$$

$$\frac{13}{72} \quad (۱)$$

$$\frac{31}{144} \quad (۴)$$

$$\frac{15}{72} \quad (۳)$$

تست



در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبه دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

$$\frac{34}{45} \quad (۲)$$

$$\frac{20}{27} \quad (۱)$$

$$\frac{23}{27} \quad (۴)$$

$$\frac{38}{45} \quad (۳)$$







در ظرف اول ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در ظرف دوم تعدادی برابر مهره آبی و قرمز وجود دارد. یک مهره به تصادف از ظرف اول به ظرف دوم منتقل می‌کنیم، سپس یک مهره از ظرف دوم خارج می‌کنیم. اگر احتمال آبی بودن این مهره برابر  $\frac{39}{77}$  باشد، در ظرف دوم در ابتدا چند مهره وجود داشته است؟

(۲) ۱۰

(۱) ۱۲

(۴) ۶

(۳) ۱۴

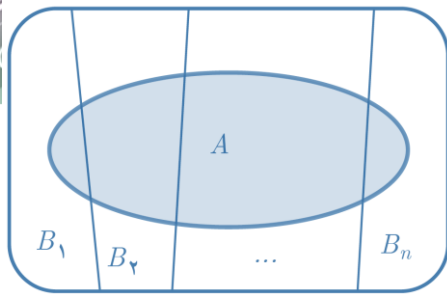
## قانون بیز یا Bayes' Theorem



گاهی در احتمالات خود پیش‌فرض‌هایی داریم. پس از مدتی این پیش‌فرض‌ها به سمت یک رده بندی خاص سوق پیدا می‌کند. در این مواقع از قانون بیز برای فرمول بندی استفاده می‌کنیم.

کالایی که از فروشگاه خریده‌ایم زیر ده هزار تومان قیمت دارد. به چه احتمالی این کالا وسیله‌ای دیجیتالی است؟





## قانون بیز یا Bayes' Theorem



فرض کنید  $B_1, \dots, B_n$  پیشامدهایی

با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه  $A$  و هر  $i \leq n$  داریم:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

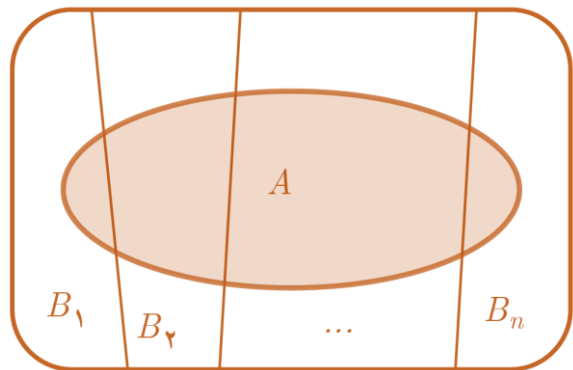
## قانون بیز یا Bayes' Theorem



$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)}$$





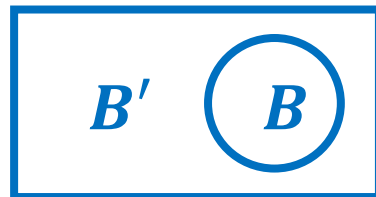
## قانون بیز یا Bayes' Theorem



فرض کنید  $B$  پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$ :

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')}$$



قانون بیز همان شرطی شده قانون احتمال کل است.

تست



فردی که به ۸۰ درصد مطالب یک درس مسلط است، به یک تست ۵ گزینه‌ای در درس موردنظر پاسخ صحیح داده است. احتمال آنکه جواب صحیح را بلد بوده باشد برابر با کدام گزینه است؟ (اگر این فرد مطلب درسی را بلد نباشد، پاسخ تست را به تصادف انتخاب می‌کند)

$$\frac{20}{21} \quad (2)$$

$$\frac{18}{19} \quad (1)$$

$$\frac{17}{19} \quad (4)$$

$$\frac{13}{19} \quad (3)$$





تست



یک تاس سالم را پرتاب کرده و سپس به تعداد عدد روشده تاس، سکه پرتاب می‌کنیم. اگر سکه دقیقاً سه بار پشت آمده باشد، با کدام احتمال در پرتاب تاس، عدد ۴ رو شده است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{۳}{۴} \quad (۴)$$

$$\frac{۲}{۳} \quad (۳)$$

تست



کیسه‌ای شامل دو مهره آبی و چهار مهره قرمز است. تاسی را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر عدد اول بیاید دو مهره آبی، اگر عدد مرکب بیاید دو مهره قرمز و در غیر این صورت یک مهره آبی و یک مهره قرمز به کیسه اضافه می‌کنیم و سپس مهره‌ای به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم. اگر مهره خارج شده آبی باشد، با کدام احتمال، تاس عددی اول آمده است؟

$$\frac{۱۹}{۴۸} \quad (۲)$$

$$\frac{۷}{۱۲} \quad (۱)$$

$$\frac{۱۲}{۱۹} \quad (۴)$$

$$\frac{۴}{۹} \quad (۳)$$





# حل تمرین

## احتمال



تست



یک عدد دورقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه این عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد یا بر ۲ بخش‌پذیر نباشد، کدام است؟

$$\frac{4}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{10} \quad (۱)$$

$$\frac{6}{10} \quad (۳)$$

تست



تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال اینکه لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۳)$$

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





تست



در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

$$\frac{17}{56} \quad (۲)$$

$$\frac{15}{56} \quad (۴)$$

$$\frac{11}{56} \quad (۱)$$

$$\frac{13}{56} \quad (۳)$$

تست



از کیسه‌ای که محتوی آن ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است، به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، بین مهره‌های خارج شده، مهره سفید نیست یا مهره سیاه نیست؟

$$\frac{17}{44} \quad (۲)$$

$$\frac{19}{44} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{22} \quad (۱)$$

$$\frac{9}{22} \quad (۳)$$

تست



ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

$$\frac{26}{63} \quad (۲)$$

$$\frac{11}{21} \quad (۴)$$

$$\frac{25}{63} \quad (۱)$$

$$\frac{10}{21} \quad (۳)$$

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app



## تست



در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

$$\frac{3}{7} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{14} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

## تست



در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است. با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟

$$\frac{6}{13} \quad (2)$$

$$\frac{15}{26} \quad (4)$$

$$\frac{11}{26} \quad (1)$$

$$\frac{7}{13} \quad (3)$$

## تست



۲ مهره سفید و ۴ مهره سیاه در کیسه‌ای موجود است. یک مهره از این کیسه به تصادف خارج می‌کنیم و بعد از مشاهده رنگ آن، آن مهره را به همراه دو مهره از رنگ دیگر به کیسه برمی‌گردانیم. اگر مجدداً سه مهره از کیسه خارج کنیم، احتمال این که فقط دو مهره از این ۳ مهره، سفید باشد، کدام است؟

$$\frac{9}{28} \quad (2)$$

$$\frac{13}{28} \quad (4)$$

$$\frac{2}{7} \quad (1)$$

$$\frac{11}{28} \quad (3)$$



تست



خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم فقط ۲ فرزند این خانواده پسر است. احتمال اینکه فرزند اول خانواده پسر باشد، چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

تست



یک عدد دورقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه این عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد یا بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، کدام است؟

$$\frac{4}{15} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{11}{15} \quad (۳)$$

تست



اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل  $P(A \cup B) - P(A - B) + P(A \cup B')$  کدام است؟

$$P(B') \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$P(A') \quad (۱)$$

$$۱ \quad (۳)$$







اگر  $P(A) = \frac{3}{6}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$  و  $C = [(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)]$  آنگاه  $P(C - B)$  کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{4}$

(۱)  $\frac{2}{6}$

(۴)  $\frac{1}{8}$

(۳)  $\frac{3}{6}$



از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه این عدد بر ۳ یا ۴ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۱۲ بخش‌پذیر نباشد، کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{50}$

(۱)  $\frac{6}{50}$

(۴)  $\frac{2}{42}$

(۳)  $\frac{8}{42}$



از مجموعه  $\{201, 202, 203, \dots, 500\}$ ، یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد نه مضرب چهار و نه مضرب پنج است؟

(۲)  $\frac{5}{54}$

(۱)  $\frac{5}{45}$

(۴)  $\frac{6}{64}$

(۳)  $\frac{6}{60}$





سکه‌ای همگن را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. اگر  $A$  پیشامد آمدن "رو" در هر دو پرتاب اول،  $B$  پیشامد آمدن "پشت" در پرتاب سوم و  $C$  پیشامد آمدن دقیقاً دو "پشت" در سه پرتاب باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل‌اند، ولی پیشامدهای  $B$  و  $C$  وابسته‌اند.
- (۲) هم پیشامدهای  $A$  و  $B$  و هم پیشامدهای  $B$  و  $C$  مستقل‌اند.
- (۳) پیشامدهای  $A$  و  $B$  وابسته‌اند، ولی پیشامدهای  $B$  و  $C$  مستقل‌اند.
- (۴) هم پیشامدهای  $A$  و  $B$  و هم پیشامدهای  $B$  و  $C$  وابسته‌اند.





# آمار و احتمال

امیر سلیمانی  
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی



این مجموعه همراه تدریس ویدیویی دوره  
آموزشی سامانه امکان می باشد و به تنهایی  
قابل استفاده و بهینه نمی باشد



# توصیف و نمایش داده ها

## آمار توصیفی



## آمار توصیفی و آمار استنباطی



برای سازماندهی، خلاصه سازی و نمایش ترسیمی داده ها برای گروه انتخابی از **آمار توصیفی** استفاده می کنیم.

آمار توصیفی یک نمونه را توصیف کرده و **قطعی** است.

**ابزارهای مورد استفاده:** شاخص های مرکزی و پراکندگی

**آمار استنباطی** داده های یک نمونه کوچک را جمع آوری و برطبق آن ویژگی های **جامعه ای که نمونه از آن انتخاب شده** را استنباط می کند. هدف **تعمیم** نمونه به جامعه است و بنابراین نمونه باید درست انتخاب بشود. **بر آورد جامعه هدف استنباط**





## تعاریف در آمار



**داده:** واقعیت‌هایی درباره یک شی یا فردند که در **محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی** به کار می‌روند.

**متغیر:** هر ویژگی از اشیا یا اشخاص، که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از یک عضو به یک عضو دیگر **تغییر می‌کند و مورد مطالعه** قرار می‌گیرد.

**مقدار متغیر (مشاهده):** در **متغیر کمی**، به عددی که به **ویژگی (متغیر)** یک عضو نسبت داده می‌شود می‌گوییم.

## تعاریف در آمار



**فراوانی یک داده:** تعداد دفعاتی که هر داده **مشاهده** می‌شود را فراوانی آن داده می‌گویند.

**فراوانی نسبی یک داده:** با تقسیم فراوانی به **تعداد کل داده‌ها**، فراوانی نسبی آن داده به‌دست می‌آید.

**درصد فراوانی:** اگر فراوانی نسبی یک داده در **100 ضرب** شود، درصد فراوانی نسبی به‌دست می‌آید. (**مجموع درصد فراوانی‌ها صد**)

$$p = \frac{f}{n} \times 100 = \frac{\text{فراوانی}}{\text{کل داده‌ها}} \times 100$$





## مثالی از تعاریف



### جدول فراوانی مربوط به مسافران یک قطار

| مسافران قطار                               | شماره مسافران | فراوانی مسافران | فراوانی نسبی مسافران |
|--------------------------------------------|---------------|-----------------|----------------------|
| مسافرانی که استراحت می کنند                | ۱             | ۵۰              |                      |
| مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می کنند | ۲             |                 | ۰/۲۵                 |
| مسافرانی که مطالعه می کنند                 | ۳             | ۱۵              |                      |
| مسافرانی که غذا می خورند                   | ۴             |                 | ۰/۱۰                 |
| تعداد کل مسافران                           |               | ۱۰۰             |                      |

### تست



چندتا از متغیرهای زیر کیفی اسمی است؟

- (الف) سطح تحصیلات      (ب) گروه خونی  
(پ) نوع بارندگی (باران - برف)      (ت) میزان بارندگی برحسب میلی متر  
(ث) رنگ اتومبیل ها      (ج) شاخص توده بدن

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)





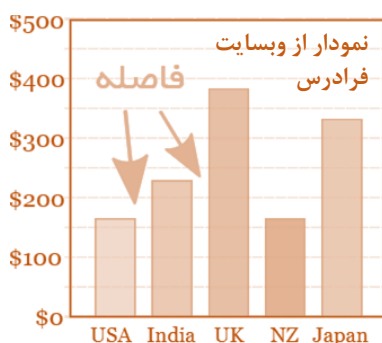
هشتاد داده آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۲۰ داده جدید به این جدول افزوده شود، فراوانی نسبی دسته وسط تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دسته مذکور به فراوانی (فراوانی مطلق) قبلی آن کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) \frac{۳}{۸} & (۲) \frac{۱}{۵} \\ (۳) \frac{۱}{۴} & (۴) \frac{۱}{۸} \end{array}$$



در یک دبیرستان، کدام نمی‌تواند یک متغیر تصادفی باشد؟

- (۱) تعداد دبیران دبیرستان
- (۲) رنگ دیوار کلاس‌های دبیرستان
- (۳) پایه‌های تحصیلی دبیرستان
- (۴) دانش‌آموزان دبیرستان



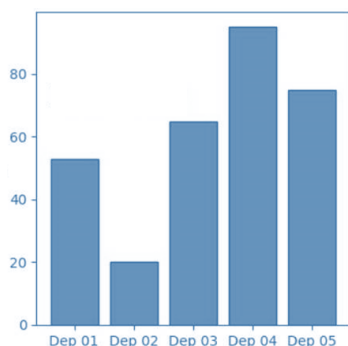
## نمودار میله‌ای



در این نمودار محور افقی مربوط به **مقادیر متغیر** و محور عمودی **فراوانی** (مطلق (تعداد)، نسبی، یا درصدی) است.

زمانی که **متغیر کمی** است، میله‌ها به ترتیب **مقدار متغیر** روی میله قرار می‌گیرند.

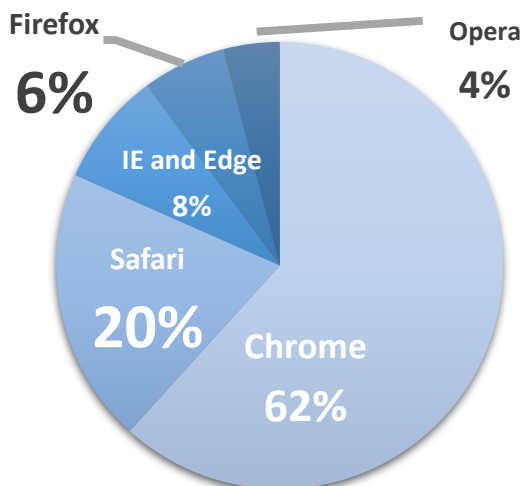
وقتی **متغیر کیفی** است، معمولاً آن را به ترتیبی روی محور افقی می‌آوریم که **افزایش یا کاهش یکنواخت** باشد.







## نمودار دایره ای



در این نمودار، به هر مقدار برای متغیر، قسمتی از دایره را متناسب با فراوانی (نسبی) آن اختصاص می‌دهیم.

$$\text{زاویه} = \frac{f}{n} \times 360^\circ = 360^\circ \times \text{فراوانی نسبی}$$

نمودار معمولاً برای متغیرهای کیفی یا کمی گسسته به کار می‌رود.

شعاع دایره در نمودار اهمیت ندارد.

## تست



شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدارک تحصیلی آنان با ۶ کد متمایز مشخص شده‌اند. در نمودار دایره‌ای، زاویه مرکزی هر گروه با واحد درجه، مطابق جدول زیر است. تعداد کارکنان با کد ۴ کدام است؟

| کد          | ۱  | ۲  | ۳  | ۴        | ۵  | ۶  |
|-------------|----|----|----|----------|----|----|
| زاویه مرکزی | ۲۷ | ۴۵ | ۹۹ | $\alpha$ | ۵۴ | ۱۸ |

۵۴ (۲)

۵۸ (۴)

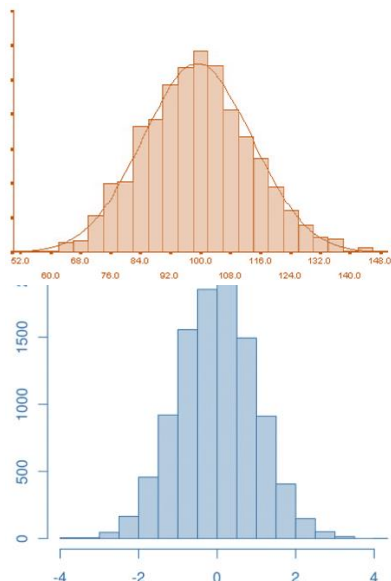
۵۲ (۱)

۵۶ (۳)





## نمودار مستطیلی (هیستوگرام یا بافت نگاشت)



در این نمودار در محور افقی داده‌های کمی پیوسته یا دسته‌بندی شده مانند شاخص کیفیت هوا، نمرات درس و... بصورت متوالی آمده‌اند.

محور قائم نمودار نیز مربوط به فراوانی است.

تست



جدول فراوانی تعدادی داده آماری به صورت زیر است. در نمودار دایره‌ای این داده‌ها، اختلاف بزرگ‌ترین زاویه و کوچک‌ترین زاویه چقدر است؟

| دسته    | $a - ۱۰$ | $۱۰ - (a + ۴)$ | $b - c$  | $c - ۱۶$ |
|---------|----------|----------------|----------|----------|
| فراوانی | $b$      | $a + ۲$        | $c + ۱۰$ | $۴$      |

۱۲۰ (۲)

۱۴۴ (۱)

۱۴۰ (۴)

۱۳۶ (۳)

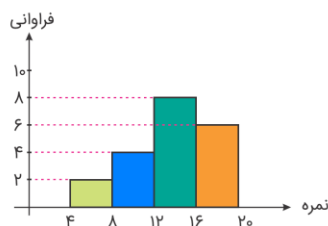




تست



نمودار بافت نگاشت مربوط به نمرات دانش‌آموزان یک کلاس به شکل زیر است. نمره چند درصد از دانش‌آموزان در بازه  $(۸, ۱۶]$  قرار دارد؟ (دسته بین  $a$  و  $b$  روی نمودار شامل بازه  $[a, b]$  است)



(۱) ۴۰

(۲) ۵۰

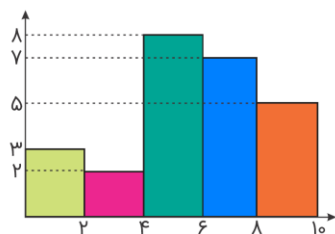
(۳) ۶۰

(۴) ۷۰

تست



نمودار مستطیلی نمره‌های آزمون عملی دانشجویان در شکل زیر داده شده است. اگر سه دانشجو که نمره‌های آن‌ها به ترتیب  $۷/۵$ ،  $۱$  و  $۳$  است، از این کلاس حذف گردیده و به جای آن‌ها ۲ دانشجو با نمره‌های  $۲/۵$  و  $۹$  به این کلاس اضافه شوند، زاویه مربوط به دسته  $۸-۱۰$  در نمودار دایره‌ای چند درجه تغییر می‌کند؟



(۱) صفر

(۲) ۱۸

(۳)  $۱۰/۸$

(۴) ۹

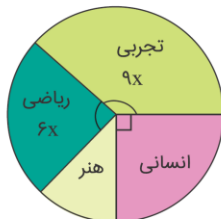




تست



نمودار دایره‌ای زیر، وضعیت ۱۰۰۰ دانش‌آموز از رشته‌های مختلف را در سال ۹۵ نمایش می‌دهد. اگر زاویه‌های مربوط به رشته‌های علوم انسانی و هنر به ترتیب  $90^\circ$  و  $45^\circ$  باشد، تعداد دانش‌آموزان رشته ریاضی کدام است؟



(۱) ۱۵۰

(۲) ۲۵۰

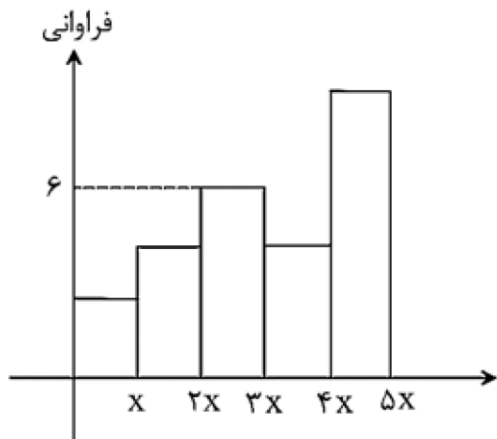
(۳) ۲۰۰

(۴) ۳۰۰

تست



در نمودار بافت‌نگاشت زیر، فراوانی نسبی دسته سوم  $0.15$  است. اگر مجموع مساحت مستطیل‌ها ۱۲۰ باشد،  $x$  کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۴

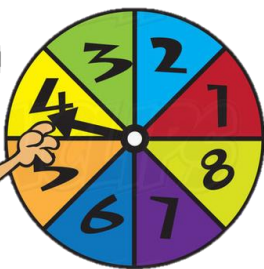
(۴) ۳





# معیارهای گرایش به مرکز

## آمار توصیفی



## مجموع داده‌ها



اگر  $n$  داده  $x_1, \dots, x_n$  داشته باشیم، مجموع آن داده‌ها را با نماد سیگما نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

و آن را سیگمای  $i$  از 1 تا  $n$  می‌خوانیم.





## میانگین داده‌ها



میانگین یا متوسط: آن را با نماد  $\bar{x}$  شان داده و داریم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

میانگین موزون داده‌ها: اگر  $n$  داده  $x_1, \dots, x_n$  داشته باشیم به طوری که تکرار هر یک به ترتیب  $w_1, \dots, w_n$  باشد، به هر یک از آنها وزن داده متناظر با آن می‌گوییم. میانگین موزون داده‌ها را با  $\bar{x}$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n}$$

## نکات مربوط به میانگین



- برای محاسبه آسان‌تر می‌توانیم در ابتدا از تمام داده‌ها مقداری را کم کرده و پس از محاسبه میانگین مقادیر جدید، عددی که کم کرده بودیم را اضافه کنیم.
- میانگین اعداد یک دنباله حسابی برابر با میانگین دو جمله اول و آخر دنباله است.
- در داده‌های اعشاری، می‌توانیم قسمت های اعشاری را با یکدیگر و قسمت های صحیح را نیز با یکدیگر جمع کرده و در نهایت مجموع کل را محاسبه کنیم.



## تغییر ترکیب در میانگین



در صورتی که مقادیر داده‌ها تغییر کند (حذف مقدار، اضافه شدن مقدار جدید، تغییر مقدار یک یا چند داده)، تغییر ترکیب در میانگین داریم.

$$\sum_{i=1}^n x_i = n \times \bar{x}$$

در محاسبه میانگین جدید تغییر روی مجموع داده‌ها پیاده می‌شود.

اگر میانگین داده‌های اضافه شده بیشتر یا کمتر باشد میانگین به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد.

اگر میانگین داده‌های تغییر یافته (در حذف، اضافه و ...) با میانگین اولیه برابر باشد، تغییری در میانگین نداریم.

تست



شخصی میانگین ۱۰ داده آماری را ۱۰۱۰ محاسبه کرده است، پس از بررسی مجدد متوجه شد که داده ۱۰۳۰ را به اشتباه ۱۳۰۰ نوشته است. میانگین واقعی کدام است؟

۹۸۳ (۲)

۷۴۰ (۱)

۷۶۰ (۴)

۱۲۷۳ (۳)





تست



نمرات ریاضی ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات، کدام است؟

|    |    |    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|----|----|---|
| ۱۸ | ۱۷ | ۱۵ | ۱۴ | ۱۲ | ۱۰ | x |
| ۴  | ۶  | ۱۰ | ۷  | ۸  | ۵  | f |

۱۴/۲۵ (۲)

۱۴/۲ (۱)

۱۴/۷۵ (۴)

۱۴/۴ (۳)

تست



در جدول فراوانی زیر، اگر میانگین داده‌ها ۱۸/۴ باشد، در نمودار دایره‌ای، زاویه مربوط به بازه (۲۱، ۲۵) چند درجه است؟

| حدود<br>دسته | ۹-۱۳ | ۱۳-۱۷ | ۱۷-۲۱ | ۲۱-۲۵ | ۲۵-۲۹ |
|--------------|------|-------|-------|-------|-------|
| فراوانی      | ۳    | ۴     | ۷     | x     | ۱     |

۷۵ (۲)

۶۰ (۱)

۹۰ (۴)

۸۰ (۳)

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkan.app







میانہ



**عدد وسط** مجموعه‌ای از داده‌های کمی را که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند میانہ گوئیم و با  $Q_2$  نشان می‌دهیم. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانہ **معدل دو عدد وسط**  $\frac{n}{2}$  و  $\frac{n+1}{2}$  است.

**میانہ یک دوم اول** داده‌های مرتب شده را **چارک اول** داده‌ها گوئیم و آن را با  $Q_1$  نشان می‌دهیم. همچنین **میانہ یک دوم آخر** داده‌های مرتب شده را **چارک سوم داده‌ها** گفته و با  $Q_3$  نشان می‌دهیم. میانہ، **چارک دوم** نیز نامیده می‌شود.

$$A = \{1, 1, 2, 5, 6, 11, 19, 26, 90, 345\}$$

نکات میانہ



- در دنباله حسابی، میانہ و میانگین برابرند:  $\bar{x} = Q_2 = \frac{x_1 + x_n}{2}$
- داده‌های دور افتاده برخلاف **میانگین** تاثیری روی **میانہ** ندارند.

- تعداد داده‌های هر نیمه  $\left[\frac{n}{2}\right]$  و چارک‌های قبل از چارک اول و بعد از چارک سوم  $\left[\frac{n}{4}\right]$  است، همچنین تعداد داده‌های بین چارک اول و سوم  $2\left[\frac{n}{4}\right] + 1$  یا  $2\left[\frac{n}{4}\right]$  است.





نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است، مقدار  $\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$  کدام است؟

۱۲/۷, ۳۰/۲, ۱۰/۶, ۱۱/۹, ۱۰/۶, ۱۲/۳, ۱۱/۲, ۱۳/۵, ۱۲/۸, ۱۱/۵

(۲) -۰/۱۲۵

(۱) -۰/۲۲۵

(۴) ۰/۲۷۵

(۳) ۰/۱۷۵



در جدول فراوانی زیر، اگر میانگین داده‌ها ۱۸/۴ باشد، در نمودار دایره‌ای، زاویه مربوط به بازه (۲۱, ۲۵] چند درجه است؟

| حدود دسته | ۹-۱۳ | ۱۳-۱۷ | ۱۷-۲۱ | ۲۱-۲۵ | ۲۵-۲۹ |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|
| فراوانی   | ۳    | ۴     | ۷     | x     | ۱     |

(۲) ۷۵

(۱) ۶۰

(۴) ۹۰

(۳) ۸۰





مد داده ای است که **بیشترین تکرار (فراوانی)** را در داده‌ها دارد.  
در نمودار میله ای، **بلندترین میله** و در نمودار دایره ای **بزرگترین زاویه** مد داده‌ها است.

اگر دو داده دارای بیشترین فراوانی باشند، داده‌ها دارای **دو مد** بوده و اگر همه داده‌ها دارای یکسان باشند، **مد نداریم**.  
اگر تمامی داده‌ها را  **$a$  برابر** کرده و با  **$b$  جمع** کنیم، **مد، میانگین، مقادیر چارک‌ها و میانه** همگی  **$a$  برابر** شده و با  **$b$  جمع** می‌شوند.

تست



در مجموعه اعداد  $\{63, 70, 66, 50, 77, 65, 64, x\}$ ، به ازای کدام مقدار  $x$ ، شاخص‌های میانگین - مد - میانه برابر هم هستند؟

- |        |           |
|--------|-----------|
| (۱) ۶۴ | (۲) ۶۵    |
| (۳) ۶۶ | (۴) نشدنی |

تست



همه داده‌های آماری را در  $۲ -$  ضرب کرده و با  $۵$  جمع می‌کنیم. مُد داده‌های حاصل  $۱$  است. مُد داده‌های قبلی کدام است؟

- |       |       |
|-------|-------|
| (۱) ۱ | (۲) ۲ |
| (۳) ۳ | (۴) ۴ |



اگر میانگین و مد در داده‌های ۵۰، ۴۵، ۱۵، ۶۰، x و ۵۵ باهم برابر باشند، میانه داده‌ها کدام است؟

۵۰ (۲)

۴۷/۵ (۱)

۵۵ (۴)

۵۲/۵ (۳)

### میانگین، میانه و مد داده‌ها، کدام معیار را انتخاب می‌کنید؟



مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعه داده‌ها داشته باشد، میانگین داده‌ها را تحت تاثیر قرار داده ولی تاثیری بر روی مد و میانه ندارد.

بدون داده دور افتاده میانگین مناسب ترین و در حالتی که داده دورافتاده داریم، مد یا میانه مناسب ترند.

اگر موضوع بررسی اموری تجاری یا رسانه‌ای و ... باشد، مد بهتر و اگر بخواهیم درباره وضع کلی داده‌ها نظر بدهیم، میانه و چارک بهتر است.

### میانگین، میانه و مد داده‌ها، کدام معیار را انتخاب می‌کنید؟



در تفسیر و تحلیل مسائل آماری، در نظر گرفتن تنها یک شاخص گرایش به مرکز کافی نیست.

می‌بایست هر سه معیار میانگین، میانه و مد محاسبه شود و براساس هدف مورد بررسی، معیار مناسب انتخاب و از آن برای انجام تفسیر، قضاوت و پیش‌بینی استفاده شود.





نمرات دانش‌آموزی در درس آمار و احتمال از اول سال تا حالا در ۶ امتحان برگزار شده برابر با  $۱۷/۵$  و  $۱۸$  و  $۱۷/۷۵$  و  $۱۹$  و  $۷$  و  $۱۸/۵$  است. کدام شاخص مرکزی برای تحلیل وضعیت این دانش‌آموز مناسب‌تر است؟

- (۱) مد  
(۲) میانه  
(۳) میانگین  
(۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.



باتوجه به جدول، میانگین داده‌های  $x_i$ ، چقدر از مد آن‌ها کمتر است؟

|            |   |   |   |   |    |
|------------|---|---|---|---|----|
| $2x_i + 1$ | ۳ | ۵ | ۷ | ۹ | ۱۱ |
| $f_i$      | ۲ | ۱ | ۳ | ۶ | ۲  |

$$\frac{۵}{۱۴} \quad (۲)$$

$$\frac{۹}{۱۴} \quad (۴)$$

$$\frac{۵}{۷} \quad (۱)$$

$$\frac{۳}{۷} \quad (۳)$$





تست



در مورد داده‌های جدول زیر، کدام گزینه درست است؟

|    |    |    |    |   |         |
|----|----|----|----|---|---------|
| ۲۰ | ۱۶ | ۱۳ | ۱۰ | ۹ | داده‌ها |
| ۳  | ۱۶ | ۹  | ۱۴ | ۸ | فراوانی |

(۲) میانگین > میانه > مد

(۱) میانه > میانگین > مد

(۴) مد > میانه > میانگین

(۳) میانه > مد > میانگین

تست



اگر در داده‌های  $x, 4, 1, 1, 3, 8, 2, 7, 3, 2$  مقدار مد برابر با ۲ باشد، میانگین این داده‌ها چقدر بیشتر از میانه آن‌ها است؟ (مد منحصر به فرد است)

(۲) ۰/۷

(۱) ۰/۶

(۴) ۰/۹

(۳) ۰/۸

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

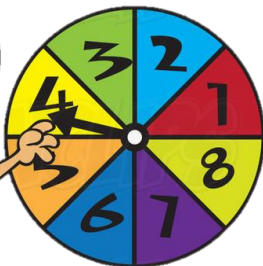
www.Emkana.app





# معیارهای پراکندگی

## آمار توصیفی



### میانگین داده‌ها



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \text{ : میانگین یا متوسط}$$

$$\bar{x}_\omega = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \dots + \omega_n} \text{ : میانگین موزون داده‌ها}$$

میانه: عدد وسط و نمایش با  $Q_2$

چارک اول داده‌ها: میانه یک دوم اول و نمایش با  $Q_1$

چارک سوم داده‌ها: میانه یک دوم آخر و نمایش با  $Q_3$

مد: داده ای با بیشترین تکرار (فراوانی)





## دستیابی به واریانس



در صورت تفاضل همه داده‌ها از میانگین (انحراف از میانگین) برای بدست آوردن انحراف معیار، میانگین در وسط داده‌ها قرار دارد، حاصل صفر است و داریم:  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$

برای رفع مشکل، قدر مطلق انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود و می‌تواند معیاری برای سنجش پراکندگی داده‌ها باشد و داریم:  $\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| = 0$

اما کارکردن با قدر مطلق آسان نیست، به همین دلیل توان دوم از انحراف از میانگین داده‌ها را در نظر می‌گیریم.

## انحراف از معیار و واریانس



واریانس داده‌ها:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

مجموع اختلاف مقادیر از میانگین به توان دو تقسیم بر تعداد یا میانگین مجذور تفاضل مقادیر از میانگین واریانس داده‌ها گوئیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n \omega_i}$$

## انحراف از معیار و واریانس



انحراف معیار داده‌ها: اگر  $n$  داده از جامعه به صورت  $x_1, \dots, x_n$  داشته باشیم، انحراف معیار را با نماد  $\sigma$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم (رادیكال جمع مربع تفاضل داده‌ها از میانگین تقسیم بر تعداد):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

واریانس داده‌ها: توان دوم انحراف معیار را واریانس داده‌ها است و آن را با نماد  $\sigma^2$  نشان می‌دهیم.







## انحراف از معیار و واریانس



- مقادیر **واریانس** و **انحراف معیار** همواره مثبت هستند.
- هرچقدر مقدار  $\sigma^2$  و  $\sigma$  افزایش یابد، یعنی داده‌ها حول میانگین **پراکنده‌تر** هستند و مقادیر کوچک آنها مطلوب ما هستند.
- انحراف معیار و یا واریانس صفر به این معنی است که **تمامی داده‌ها با هم برابرند**.
- واحد واریانس مجذور واحد داده‌هاست.
- اگر وقتی که داده‌هایی اضافه و یا کم می‌شود، **میانگین  $\bar{x}$  تغییر نکند**، می‌توانیم بدون تغییر فرمول به پاسخ سوال برسیم.

## انحراف از معیار و واریانس



برای زمانی که میانگین مربعات داده‌ها را داریم و مربع میانگین داده‌ها را داریم می‌توانیم از این رابطه استفاده کنیم (**مجموع مجذورات تقسیم بر تعداد اعضا منهای میانگین به توان دو**):

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

رابطه بالا تنها زمانی قابل استفاده است که مجموع مجذورات داده‌ها را بخواهند یا در مرحله ای به ما بدهند.





## انحراف از معیار و واریانس



اثبات رابطه  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$  با استفاده از رابطه اصلی

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

## اثر تغییر ترکیب روی واریانس، انحراف معیار



اگر تمام داده‌ها را با  $b$  جمع کنیم، انحراف معیار تغییری نمی‌کند.

$$\sigma_{new} = \sigma_{old}$$

$$\sigma_{new}^2 = \sigma_{old}^2$$

اگر تمام داده‌ها را در  $a$  ضرب کنیم، مقدار انحراف معیار  $|a|$  برابر می‌شود و مقدار واریانس  $a^2$  برابر خواهد شد.

$$\sigma_{new} = \sigma_{old} \times |a|$$

$$\sigma_{new}^2 = \sigma_{old}^2 \times a^2$$

## انحراف از معیار و واریانس



اگر داده‌ها دنباله حسابی بسازند، واریانس برابر با عبارت  $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} d^2$  است. به

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} |d| \text{ همین ترتیب:}$$





۳۰ داده آماری با انحراف معیار ۳ مفروض هستند. چند داده مساوی با میانگین باید به آنها اضافه کنیم، تا واریانس کل داده‌ها برابر با ۳ شود؟

$$۴۵ \quad (۲)$$

$$۳۰ \quad (۱)$$

$$۷۵ \quad (۴)$$

$$۶۰ \quad (۳)$$



اگر واریانس داده‌های  $۲a - ۴$ ،  $۳b - ۲$ ،  $۸ - ۴c$  و ۴ برابر صفر باشد، واریانس داده‌های  $a$ ،  $b$  و  $c$  کدام است؟

$$\frac{۱}{۳} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$\frac{۲}{۳} \quad (۴)$$

$$\frac{۴}{۳} \quad (۳)$$





میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

۹/۳۶ (۲)

۹/۲۵ (۱)

۹/۶۳ (۴)

۹/۵۲ (۳)



واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده‌های ۱۶، ۲۴ و ۲۶ به آن اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند، انحراف معیار ۱۴ داده حاصل کدام است؟

۱/۲۵ (۲)

۰/۷۵ (۱)

۲ (۴)

۱/۵ (۳)





اگر انحراف از میانگین چهار داده به صورت ۳، ۱، a و ۲- باشد، انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

$$۴ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

$$۲\sqrt{۳} \quad (۴)$$

$$\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \quad (۳)$$



اگر انحراف معیار داده‌های آماری  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر ۳ باشد، آنگاه واریانس داده‌های آماری  $۲x_1 + ۴, ۲x_2 + ۴, \dots, ۲x_n + ۴$  کدام است؟

$$۲۷ \quad (۲)$$

$$۱۸ \quad (۱)$$

$$۳۶ \quad (۴)$$

$$۹ \quad (۳)$$





## ضرب تغییرات داده‌ها



نسبت معیار بر میانگین ضرب تغییرات داده ( $CV$ ) را به دست می‌دهد و داریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

در مقایسه دو گروه، هرچه ضرب تغییرات **ما کمتر** باشد، میزان **دقت بیشتر** و میزان **پراکندگی داده‌ها کمتر** است.

ضرب تغییرات واحد ندارد و معمولاً آن را در **100 ضرب کرده** و آن را بصورت درصد بیان می‌کنیم.

## اثر تغییر ترکیب روی واریانس، انحراف معیار و ضرب تغییرات



اگر تمام داده‌ها را در  $a$  ضرب کنیم، مقدار انحراف معیار  $|a|$  برابر می‌شود و مقدار واریانس  $a^2$  برابر خواهد شد. ضرب تغییرات در این حالت تغییر نمی‌کند.

$$\sigma_{new} = \sigma_{old} \times |a|$$

$$\sigma_{new}^2 = \sigma_{old}^2 \times a^2$$

$$CV_{new} = \frac{a\sigma}{a\bar{x}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = CV_{old}$$

## اثر تغییر ترکیب روی واریانس، انحراف معیار و ضرب تغییرات



اگر تمام داده‌ها را با  $b$  جمع کنیم، مقدار انحراف معیار تغییری نمی‌کند، اما میانگین بعلاوه  $b$  شده و در نتیجه اگر  $b < 0$  ضرب تغییرات زیاد و اگر  $b > 0$  ضرب تغییرات کم می‌شود.

$$\sigma_{new} = \sigma_{old}$$

$$\sigma_{new}^2 = \sigma_{old}^2$$

$$CV_{new} = \frac{\sigma}{\bar{x} + b}$$





تست



در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هریک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چندبرابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

$$\frac{5}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{8}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{8} \quad (۳)$$

تست



قدر مطلق اختلاف از میانگین داده‌هایی با میانگین ۱۰ به ترتیب ۱، ۳، ۳، ۳، ۵، ۵، ۵ و ۵ است. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

$$۰/۴ \quad (۲)$$

$$۰/۳ \quad (۱)$$

$$۰/۶ \quad (۴)$$

$$۰/۵ \quad (۳)$$





ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان یک کلاس، ۳ سال بعد، ۲۰ درصد کمتر از ضریب تغییرات سن فعلی آنها است. میانگین سن فعلی دانش‌آموزان این کلاس کدام است؟

۱۰ (۲)

۸ (۱)

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)



اگر داده‌های  $x_i$  به صورت ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ باشند، آنگاه ضریب تغییرات داده‌های  $u_i = 5x_i + 3$  تقریباً کدام است؟

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

۰/۶ (۴)

۰/۵ (۳)



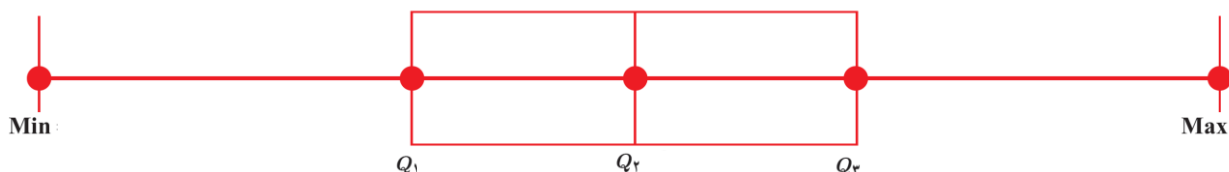




## نمودار جعبه‌ای



به نمودار زیر نمودار جعبه‌ای گوییم. در این نمودار چارک اول، میانه چارک سوم، بیشترین و کمترین مقدار داده‌ها به‌طوری همزمان نشان داده می‌شود.

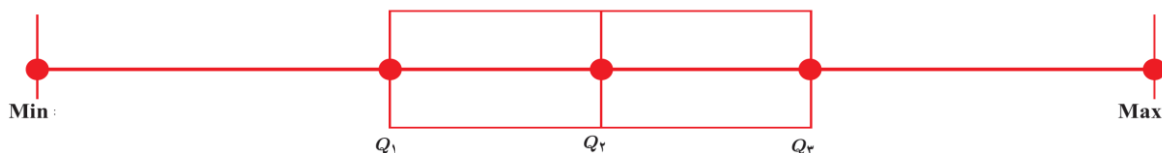


داده‌های بین چارک اول و سوم، درون جعبه قرار می‌گیرند.

## نکات نمودار جعبه‌ای



دامنه تغییرات برابر  $Max - min$  است. دامنه تغییرات میان چارکی یا بین چارکی ( $IQR$ ) برابر  $Q_3 - Q_1$  است.



خود چارک اول و سوم، روی جعبه قرار دارند و عرض مستطیل دلخواه است. وجود داده دورافتاده سبب طولانی شدن دنباله‌های نمودار جعبه‌ای می‌شود. نمودار جعبه‌ای مناسب مقایسه است.





تست



نمرات درس حسابان دانش‌آموزان یک کلاس به صورت  
۴، ۱۳، ۱۶، ۷، ۱۵، ۱۱، ۱۸، ۶، ۱۵، ۱۸، ۱۴ است. اگر نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم  
کنیم، اختلاف بین میانگین داده‌های داخل جعبه و میانگین داده‌های خارج جعبه کدام  
است؟

(۲)  $1/5$

(۱) ۲

(۴)  $0/5$

(۳) ۱

تست



اگر میانه داده‌های ۱۰، ۲، ۵، ۵، ۱۱،  $a$ ، ۹ و ۳، برابر ۶ باشد، آنگاه اختلاف بین میانگین و  
دامنه میان چارکی این داده‌ها کدام است؟

(۲)  $0/5$

(۱) صفر

(۴)  $1/5$

(۳) ۱

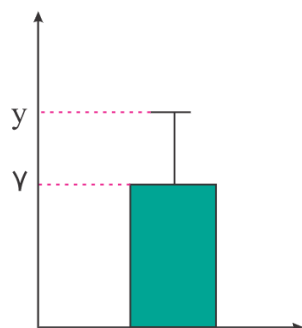




تست



اگر نمودار زیر مربوط به داده‌های ۳، ۱، ۹،  $x$ ، ۷، ۵، ۱۳ باشد، مقدار  $y$  کدام است؟



۷ (۲)

۴ (۱)

۲۳ (۴)

۱۱ (۳)

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





# آمار و احتمال

امیر سلیمانی  
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی



این مجموعه همراه تدریس ویدیویی دوره  
آموزشی سامانه امکان می باشد و به تنهایی  
قابل استفاده و بهینه نمی باشد



# گردآوری داده‌ها

## آمار استنباطی



### تعاریف اولیه



**داده:** واقعیت‌هایی درباره یک شی یا فردند که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند.

**واحد آماری:** هریک از افراد یا اشیا که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

**جامعه آماری:** مجموعه کل واحدهای آماری را گویند.

**نمونه آماری:** هر زیرمجموعه از جامعه آماری که با روش مشخصی انتخاب شده است، یک نمونه می‌نامند.

**نمونه‌گیری:** فرایند انتخاب نمونه‌ای از یک جامعه، به منظور تعمیم اطلاعات آن جامعه است.





## یادآوری



**متغیر:** هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.

**متغیر کمی:** متغیری است که **مقادیر عددی** می‌گیرد و برای آن **عملیات ریاضی** جمع، تفریق، و معدل‌گیری قابل انجام است.

**متغیر کیفی:** متغیری است که **صرفاً برای دسته‌بندی** افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌رود و **لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرد**.

## پارامتر جامعه و آماره نمونه



**پارامتر** یا **پارامتر جامعه:** یک **مشخصه عددی** است که **توصیف‌کننده** جنبه‌ای خاص از **جامعه** است و در صورتی که **داده‌های کل جامعه** در اختیار باشد، قابل محاسبه است مانند نسبت افراد بالای 65 سال به کل جامعه ایران.

**آماره** یا **آماره نمونه:** **مشخصه‌ای عددی** که **توصیف‌کننده** جنبه‌ای خاصی از **نمونه** است و از **داده‌های نمونه** به دست می‌آید و برای **تخمین پارامتر جامعه** به کار می‌رود.

فرایند نتیجه‌گیری درباره **پارامتر** از **نمونه**، **آمار استنباطی** است.

## روش‌های نمونه‌گیری



**نمونه‌گیری احتمالی:** نمونه‌گیری است که همه واحدهای آماری **احتمال معلوم** برای انتخاب در نمونه باشد. و از **روش تصادفی** برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده شود.

**نمونه‌گیری غیراحتمالی:** به نمونه‌گیری که هریک از خصوصیات نمونه‌گیری احتمال اعم از **معلوم بودن احتمال** و یا **تصادفی بودن روش** را نداشته باشد، نمونه‌گیری غیراحتمالی گوییم.





## روش های نمونه گیری

### نمونه گیری احتمالی

نمونه گیری تصادفی ساده  
نمونه گیری طبقه ای  
نمونه گیری سیستماتیک (سامان مند)  
نمونه گیری تصادفی ساده

### نمونه گیری غیر احتمالی

نمونه گیری دردسترس  
نمونه گیری سهمیه ای  
نمونه گیری قضاوتی  
نمونه گیری گلوله برفی

## نمونه گیری احتمالی



**نمونه گیری تصادفی ساده:** در این روش همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، **احتمال یکسانی** دارند. در اینجا نیاز به **فهرست اعضای جامعه داریم**، محدودیت اصلی تهیه فهرست است. مزیت روش شانس انتخاب یکسان اعضا و **دقت آن** است.

**نمونه گیری طبقه ای:** جامعه را به **جامعه های مجزا** از هم (مانند مردان و زنان یا براساس گروه سنی) تقسیم کرده و از هر طبقه، **نمونه تصادفی** برمی داریم. معمولاً تعداد افراد انتخاب شده از هر طبقه **متناسب با سهم طبقه از جامعه** است. مزیت این روش **حفظ نسبت ها در انتخاب نمونه** است اما نیاز به **شناسایی یکایک طبقات** جامعه قبل از عضوگیری دارد.





## نمونه‌گیری احتمالی



نمونه‌گیری سیستماتیک (سامان‌مند): نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای که در آن **اندازه طبقه‌ها** با هم برابر است. فقط از **طبقه اول**، واحد آماری به تصادف انتخاب شده و به **همان رویه از طبقات دیگر**، کار انجام می‌شود.

نمونه‌گیری خوشه‌ای: نمونه‌گیری که در آن، واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، **گروها یا خوشه‌ها** باشند. سپس **همه واحدهای آماری** خوشه‌های انتخاب شده را بعنوان نمونه در نظر می‌گیریم، مانند انتخاب چند روستای استان و بررسی سطح رضایت مردم از خدمات دولتی در آن‌ها.

عدم دسترسی و **فاصله زیاد** بین اعضای جامعه، اما **نزدیکی اعضای خوشه** باعث انجام این نمونه‌گیری است که در این حالت مقرون به صرفه است.

## نمونه‌گیری غیر احتمال



نمونه‌گیری دردسترس: فقط از افراد و اشیا در **دسترس** نمونه می‌گیریم.

نمونه‌گیری سهمیه‌ای: در حالت **دسترس**، تعداد افراد انتخابی را **متناسب با سهم هر گروه** از جامعه تعیین می‌کنیم.

نمونه‌گیری قضاوتی: در نمونه‌گیری سراغ **گروه خاصی** از جامعه می‌رویم.

نمونه‌گیری گلوله برفی: در مواردی که جامعه آماری **محل استقرار نامشخص** دارند، عضوهایی از جمعیت باعث **راهنمایی آمارگیر** به عضوهای جدید می‌شود.

## اریب و نااریب بودن نمونه



اگر یک روش نمونه‌گیری از **نمونه‌گیری ایده‌آل** فاصله بگیرد (که به کمک معیارهایی خاص مشخص می‌شود) و به سمتی خاص انحراف پیدا کند می‌گویند آن **روش نمونه‌گیری اریب** است مانند بررسی بازار میوه با نمونه‌گیری قضاوتی از دلالان میوه

آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی **منابع تولید اریبی**، نمونه‌گیری‌ها را تا جایی که می‌توانند **نااریب** کنند.



## روش های گردآوری داده



**آمارگیری:** گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن  
**آمارگیر:** کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد.

**وقتی نمونه‌گیری انجام شد، باید مقادیر متغیر اعضا نمونه گردآوری شود.**

روش‌های گردآوری داده‌ها

مشاهده  
پرسش‌نامه  
مصاحبه  
دادگان (پایگاه داده‌ها)

## روش‌های گردآوری داده



- 1. مشاهده:** گردآوری داده‌ها **بدون نیاز به پاسخگو.** توسط مشاهده، ثبت رویدادها و اندازه‌گیری انجام می‌شود مثل شمارش سواری‌ها در خیابان
- 2. دادگان:** شامل مجموعه‌ای از **اطلاعات ذخیره شده** است. به دلیل تولید داده‌ها به صورت خودکار، **استفاده از این روش رواج یافته است** مانند اینترنت، پایگاه‌های داده سازمان‌ها و...
- 3. پرسش‌نامه:** مجموعه سوالات از پیش **تعیین شده (دانستن پاسخ‌های ممکن)** که توسط تعداد پاسخگو **(نمونه انتخابی)** تکمیل می‌شود. مرسوم‌ترین ابزار برای گرفتن اطلاعات از مردم مانند مرکز آمار ایران (سرشماری نفوس و مسکن)، آمارگیری پستی، اینترنتی و ...
- 4. مصاحبه (پرسش شفاهی):** معمولاً **میان دو نفر** (آمارگیر و مصاحبه‌شونده)، آمارگیر از همه پاسخ‌های ممکن مطلع نیست.





تست



برای "سرشماری نفوس و مسکن" و "شمارش تعداد خودروهای مشکی عبوری از یک خیابان" به ترتیب از راست به چپ از کدام روش‌های گردآوری داده‌ها استفاده می‌شود؟

(۲) مشاهده - دادگان

(۱) مصاحبه - پرسش‌نامه

(۴) پرسش‌نامه - مشاهده

(۳) دادگان - مصاحبه

تست



قرار است یک نمونه ۱۵۰تایی از بین ۲۷۰ سرباز برای انتقال به یک پادگان دیگر به روش سیستماتیک انتخاب شود. اگر پنجمین سرباز عضو نمونه باشد، سربازی با کدام شماره عضو نمونه نیست؟

(۲) ۹۵

(۱) ۴۱

(۴) ۱۶۷

(۳) ۱۲۹





تست



در کدام گزینه هر چهار نوع متغیر کمی پیوسته، کمی گسسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی وجود دارد؟

(۱) تعداد فرزندان خانواده، قد افراد، گروه خونی، میزان لذت بردن از آشپزی

(۲) تعداد مسافران یک قطار، اقوام ایرانی، قد افراد، جنسیت افراد

(۳) انواع هواپیما، مدت زمان رسیدن از خانه به مدرسه، رنگ چشم، میزان بارندگی برحسب سانتی متر

(۴) مراحل رشد یک انسان، نوع بارندگی، میزان دمای هوا، شدت بارندگی

تست



مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است، ..... نام دارد و به هریک از افراد یا اشیاء که داده‌های مربوط به آن‌ها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود، ..... گفته می‌شود.

(۲) آماره - جامعه آماری

(۱) پارامتر - واحد آماری

(۴) آماره - واحد آماری

(۳) پارامتر - جامعه آماری





تست



روش گردآوری داده‌ها در کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

(۱) وضعیت آلودگی هوا

(۲) تعداد دستگاه‌های عابربانک موجود در یک خیابان

(۳) رضایت مردم تهران از وسایل نقلیه عمومی

(۴) وضعیت آب‌گرفتگی معابر

تست



مدیر یک مدرسه قصد دارد میزان رضایت دانش‌آموزان از امکانات موجود در مدرسه را بررسی کند. به همین جهت ۶ نفر از دانش‌آموزان هر کلاس را به تصادف انتخاب می‌کند. از کدام روش نمونه‌گیری برای این منظور استفاده شده است؟

(۲) طبقه‌ای

(۱) تصادفی ساده

(۴) سیستماتیک

(۳) خوشه‌ای

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





برای نظرسنجی در مورد تغییر ساعت رسمی کشور در نیمه اول هر سال، چه تعداد از روش‌های نمونه‌گیری زیر اریب هستند؟  
الف) افراد در دسترس به‌عنوان نمونه انتخاب کنیم.

ب) پرسش‌نامه‌ای به ایمیل‌های انتخاب‌شده ارسال نماییم.

پ) از دفترچه راهنمای تلفن، تعدادی شماره به‌تصادف انتخاب کنیم.

ت) یک نمونه غیرتصادفی انتخاب کنیم (افراد حاضر در نمونه از قبل مشخص شده باشند).

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)



چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) احتمال انتخاب تمامی واحدهای آماری در نمونه‌گیری طبقه‌ای برابر است.

ب) در نمونه‌گیری طبقه‌ای اندازه طبقات باهم برابرند.

پ) در نمونه‌گیری طبقه‌ای، طبقات کاملاً جدا از هم هستند.

۲ (۲)

۳ (۱)

هیچ (۴)

۱ (۳)





تست



کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

(۱) در نمونه‌گیری سیستماتیک، احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است.

(۲) در نمونه‌گیری خوشه‌ای، احتمال انتخاب خوشه‌ها برابر است.

(۳) در نمونه‌گیری طبقه‌ای، از هر طبقه یک نمونه تصادفی ساده انتخاب می‌شود.

(۴) در نمونه‌گیری طبقه‌ای، احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است.

تست



در یک نمونه‌گیری سامانمند بین ۴۵۰ نفر که به ترتیب از شماره ۱ تا ۴۵۰ شماره‌گذاری شده‌اند، می‌خواهیم یک نمونه ۳۰ تایی انتخاب کنیم. اگر یکی از اعضای انتخابی شماره ۸۲ باشد، آنگاه کدام شماره انتخاب نشده است؟

(۲) ۱۷۲

(۱) ۳۷

(۴) ۴۰۲

(۳) ۲۷۷

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkan.app





تست



در نمونه‌گیری طبقه‌ای ۱۲ نفر از بین ۵۷ جوان، ۳۸ کودک و ۱۹ میانسال، باید به ترتیب چند کودک، چند جوان و چند میانسال برداریم؟

(۲) ۲، ۴، ۶

(۱) ۲، ۴، ۶

(۴) ۱، ۸، ۳

(۳) ۴، ۴، ۴







# برآورد

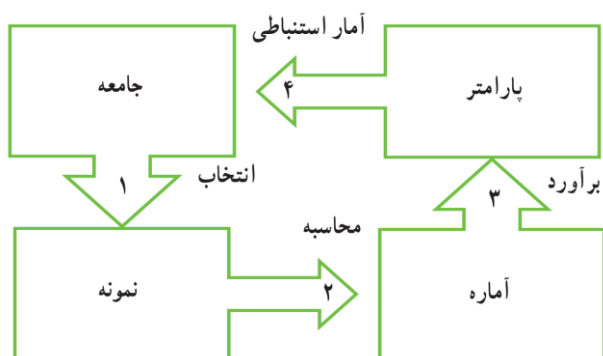
## آمار استنباطی



برآورد



آمار استنباطی به پیش‌بینی خصوصیات جامعه با استفاده از اطلاعات فعلی (که عموماً از نمونه به‌دست آمده) می‌پردازد.



به این پیش‌بینی انجام شده

برآورد نقطه‌ای

برآورد بازه‌ای

برآورد





## برآورد نقطه‌ای



پارامتر جامعه معمولاً میانگین مقادیر داده برای تمام اعضای جامعه است. (می‌تواند چیزهای دیگری نیز باشد.)

آماره نمونه  $\bar{x}$  ← میانگین نمونه  
 برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه  $\mu$  ←

برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونه تصادفی در آماره نظیر آن پارامتر.

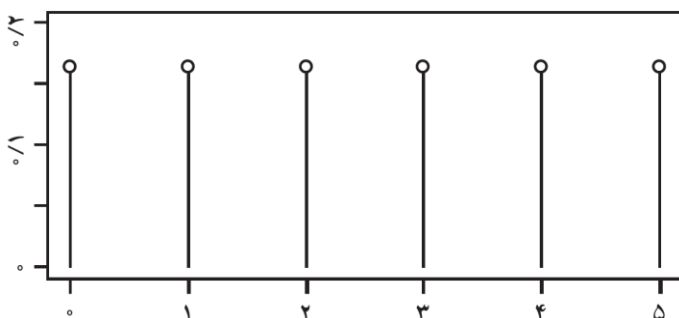
## نمونه‌های متفاوت از جامعه



جامعه از 6 نفر تشکیل شده که درآمد ماهیانه آنها برحسب میلیون تومان بصورت زیر است:

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| ۴ | ۱ | ۰ | ۳ | ۵ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|

$n = 1$



در اینجا پارامتر جامعه میانگین درآمدها است.  
 اندازه نمونه 1 را می‌گیریم.  
 نمودار روبرو نمودار احتمال مشاهده نمونه یک‌تایی





## نمونه‌های متفاوت از جامعه

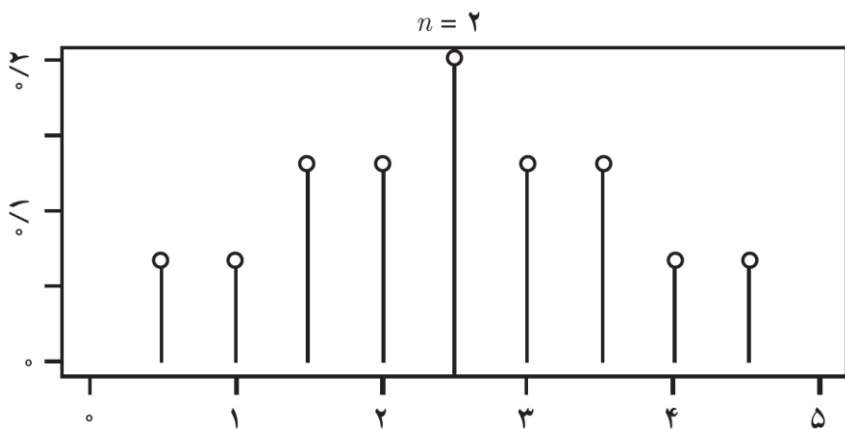


برای نزدیک شدن بر آورد به پارامتر چه پیشنهادی دارید؟

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| ۴ | ۱ | ۰ | ۳ | ۵ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|

| نمونه     | {۰,۱}          | {۰,۲}          | {۰,۳}{۱,۲}     | {۰,۴}{۱,۳}     | {۰,۵}{۱,۴}{۲,۳} | {۱,۵}{۲,۴}     | {۲,۵}{۳,۴}     | {۳,۵}          | {۴,۵}          |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\bar{x}$ | ۰/۵            | ۱              | ۱/۵            | ۲              | ۲/۵             | ۳              | ۳/۵            | ۴              | ۴/۵            |
| احتمال    | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{15}$  | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

## بر آورد با نمونه



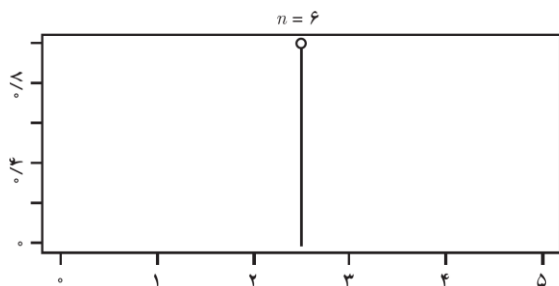
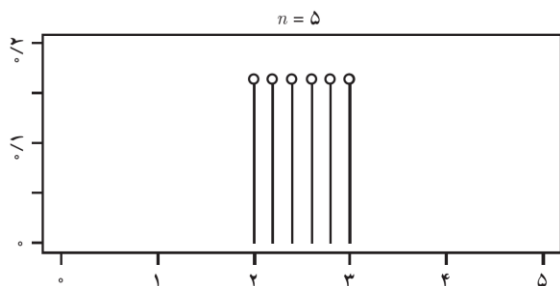
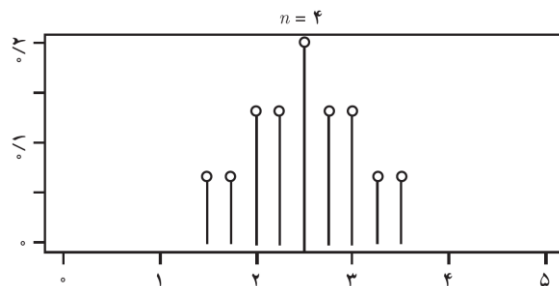
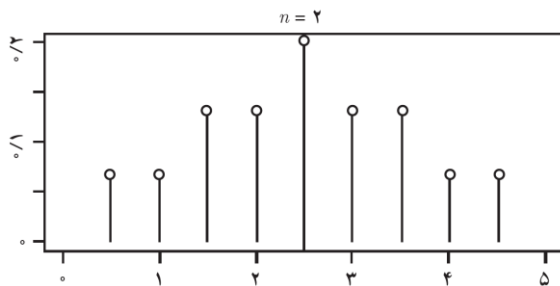
| نمونه     | {۰,۱}          | {۰,۲}          | {۰,۳}{۱,۲}     | {۰,۴}{۱,۳}     | {۰,۵}{۱,۴}{۲,۳} | {۱,۵}{۲,۴}     | {۲,۵}{۳,۴}     | {۳,۵}          | {۴,۵}          |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\bar{x}$ | ۰/۵            | ۱              | ۱/۵            | ۲              | ۲/۵             | ۳              | ۳/۵            | ۴              | ۴/۵            |
| احتمال    | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{15}$  | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

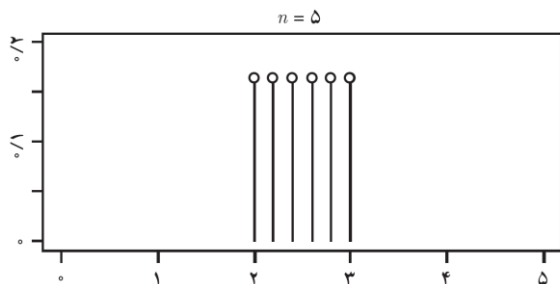
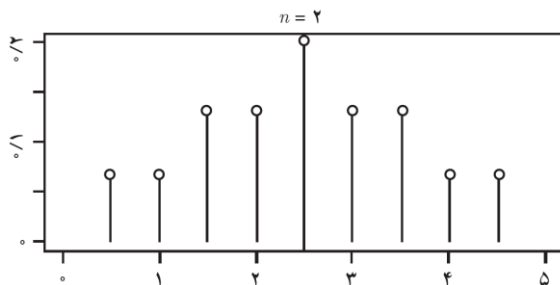




## بر آورد با نمونه



## بر آورد با نمونه



اگر در جامعه 6 عضوی اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند، شکل نمودار و محور عمودی آن همواره مانند روبرو خواهد شد.

مجموع احتمال‌ها همواره برابر با یک است.

نمونه  $n - 1$  عضوی جامعه  $n$  عضوی، دارای  $n$  میله هم ارتفاع





تست



فرض کنید جامعه‌ای از ۵ نفر که درآمد ماهیانه آن‌ها برحسب میلیون تومان به صورت ۹ و ۷ و ۴ و ۳ و ۲ است، تشکیل شده باشد. اگر بخواهیم میانگین درآمدی اعضای این جامعه را به کمک نمونه‌ای به اندازه ۳ برآورد کنیم، احتمال آنکه میانگین نمونه کمتر از میانگین جامعه باشد، کدام است؟

۰/۵ (۲)

۰/۳ (۱)

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

تست



از میان اعداد صحیح ۰ تا  $N$ ، شش عدد ۲۰، ۱۸، ۱۴، ۱۱، ۵، ۴ به طور تصادفی انتخاب شده‌اند. برآورد نقطه‌ای از  $N$  به کمک پارامتر میانگین کدام است؟

۲۳ (۲)

۲۴ (۱)

۲۱ (۴)

۲۲ (۳)





از جامعه  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$  یک نمونه ۶ تایی انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این نمونه، میانگین جامعه را دقیقاً درست برآورد می‌کند؟

$$\frac{3}{28} \quad (2)$$

$$\frac{1}{28} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{7} \quad (3)$$



درآمد ماهیانه یک جامعه شامل ۶ خانواده برحسب میلیون تومان به صورت  $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$  است. اگر برای برآورد میانگین درآمد ماهیانه در این جامعه، نمونه  $\{2, 6\}$  انتخاب شود، کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) آماره نمونه برابر با ۴ است.

(۲) برآورد نقطه‌ای از پارامتر جامعه برابر با ۴ است.

(۳) پارامتر جامعه برابر با ۴ است.

(۴) نمونه انتخاب شده، میانگین جامعه را به طور دقیق برآورد نمی‌کند.





## انحراف معیار بر آورد میانگین



هر نمونه  $n$  عضوی، یک بر آورد از میانگین جامعه (پارامتر جامعه) به ما می‌دهد. به انحراف معیار این مقادیر، **انحراف معیار بر آورد میانگین** می‌گوییم و با  $\sigma_{\bar{x}}$  نشان می‌دهیم.

## انحراف معیار بر آورد میانگین



اگر در جامعه‌ای **تعداد اعضا بسیار زیاد** باشد که بتوانیم آنرا نامتناهی فرض کنیم (یعنی چي بتوانيم نامتناهی فرض کنیم؟)

رابطه زیر برقرار است:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\text{انحراف معیار جامعه}}{\text{جذر اندازه نمونه}}$$

با افزایش اندازه نمونه انحراف معیار بر آورد کاهش می‌یابد. در سوال‌هایی که از این مبحث داریم جامعه نامتناهی است.

## تست



اگر انحراف معیار بر آورد میانگین جامعه‌ای توسط یک نمونه ۱۶ تایی از این جامعه برابر  $3/6$  باشد، انحراف معیار بر آورد میانگین این جامعه توسط یک نمونه ۴۴ تایی از آن کدام است؟

۰/۹ (۲)

۱/۲ (۱)

۰/۴ (۴)

۰/۶ (۳)





انحراف معیار برآورد میانگین جامعه‌ای توسط دو نمونه مختلف از این جامعه محاسبه شده است. اگر تعداد اعضای نمونه دوم، ۴۰۰ واحد بیشتر از نمونه اول و انحراف معیار برآورد میانگین توسط نمونه دوم، ۶۰ درصد نمونه اول باشد، آنگاه مجموع تعداد اعضای دو نمونه کدام است؟

۶۵۰ (۲)

۵۰۰ (۱)

۱۲۰۰ (۴)

۸۵۰ (۳)



اگر انحراف معیار برآورد میانگین نمونه‌ای ۲۵ تایی از یک جامعه برابر با  $1/8$  باشد، انحراف معیار برآورد میانگین نمونه‌ای ۲۲۵ تایی از این جامعه کدام است؟

۰/۳ (۲)

۰/۲ (۱)

۰/۹ (۴)

۰/۶ (۳)

## برآورد بازه‌ای میانگین



برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان پارامتر جامعه عبارت است از **بازه‌ای عددی** برای پارامتر به همراه یک **درصد اطمینان** که به **ضریب اطمینان** شهرت دارد.

با داشتن مقادیر انحراف معیار جامعه  $\sigma$  و میانگین نمونه  $\bar{x}$  و تعداد اعضای نمونه می‌توان یک بازه اطمینان بدست آورد.





## بر آورد بازه‌ای برای میانگین جامعه



اگر نمونه تصادفی به اندازه  $n$  در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از 95% می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

که  $\mu$  میانگین جامعه (پارامتر) و  $\sigma$  انحراف معیار جامعه است.

## بر آورد بازه‌ای برای میانگین جامعه



$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

حد پایین (بالا) برابر میانگین نمونه منهای (بعلاوه) دو برابر انحراف معیار تقسیم بر رادیکال اندازه نمونه است.

درصد اطمینان 95 به این معنی است که در  $n$  بار نمونه‌گیری انتظار داریم، 95 درصد بازه‌ها شامل میانگین جامعه باشد یا بطور مشابه 95 درصد جامعه‌هایی که این نمونه را دارند، میانگین جامعه‌ای در این بازه دارند.

## نکات مربوط به بر آورد بازه‌ای



$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu - \bar{x} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$|\mu - \bar{x}| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

طول بازه  $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$  و مرکز آن  $\bar{x}$  است.

در صورتی که بازه اطمینان بصورت  $[a, b]$  داده شده باشد، می‌توان با این اطلاعات نیاز مسئله را حساب کرد.

اگر تعداد نمونه  $m$  برابر شود، طول بازه بر  $\sqrt{m}$  تقسیم می‌شود.



## برآورد بازه‌ای نسبی



اگر از جامعه‌ای نسبتاً بزرگ،  $n$  نمونه تصادفی ساده انتخاب کرده و  $m$  تا از آنها شرط موردنظر ما را داشته باشد، آن‌گاه نسبت واقعی افرادی از جامعه که آن ویژگی را دارند، با اطمینان 95% در بازه زیر است:

$$\left( p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

که در آن  $p = m/n$  برآورد پارامتر نسبت به ویژگی جامعه.

## نکات برآورد بازه‌ای نسبی



$$\left( p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

اندازه بازه اطمینان وابسته به تعداد اعضای نمونه است ولی ارتباطی با تعداد اعضای جامعه ندارد.

اگر بخواهیم بدون تغییر نمونه بازه اطمینان خود را افزایش (بیش از 95%) لازم به جای 2 ضریبی بزرگتر قرار دهیم.

## نکات برآورد بازه‌ای نسبی



$$\left( p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

در اینجا  $t = 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  در این صورت مرکز بازه  $p$  و طول بازه  $2t$  است. در صورتی که بازه را به صورت  $(a, b)$  داشته باشیم این اطلاعات به ما کمک می‌کند.



$$\left( p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

در صورتی که تعداد نمونه‌ها را  $k$  برابر کنیم، طول بازه اطمینان تقسیم بر  $\sqrt{k}$  می‌شود. اگر تعداد نمونه‌ها را 100 برابر کنیم، دقت محاسبه یک رقم اعشار بهتر خواهد شد.

## نکات بر آورد بازه‌ای نسبی



در حالت کلی، قبل آمارگیری برآوردی از نسبت مطالعه نداریم. پس اگر بخواهیم طول بازه اطمینان دلخواه داشته باشیم، چگونه می‌توانیم اندازه نمونه را مشخص کنیم؟

طول بازه  $2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  است.

$$\left( p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \subseteq \left( p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$





تست



بازۀ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات درس ریاضیات گسسته دانش‌آموزان کل کشور در امتحانات نهایی بر اساس دو نمونه به‌اندازه‌های  $n_1$  و  $n_2$  به ترتیب به‌صورت  $[۱۲/۲, ۱۲/۸]$  و  $[۱۲, ۱۳/۲]$  به دست آمده است. نسبت  $n_1$  به  $n_2$  کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴)  $\frac{۱}{۴}$

(۳)  $\frac{۱}{۲}$

تست



یک نمونه تصادفی شامل ۱۴۴ دانش‌آموز از میان دانش‌آموزان پایه یازدهم ریاضی استان تهران انتخاب کرده‌ایم. اگر میانگین نمرات درس آمار و احتمال این گروه برابر با  $۱۵/۵$  و انحراف معیار نمرات این درس در سطح استان برابر با  $۱/۵$  باشد، آنگاه بازۀ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین نمرات این درس در سطح استان کدام است؟

(۲)  $[۱۵/۳, ۱۵/۷]$

(۱)  $[۱۵/۴, ۱۵/۶]$

(۴)  $[۱۵, ۱۶]$

(۳)  $[۱۵/۲۵, ۱۵/۷۵]$





اگر برآورد بازه‌ای با اطمینان بیش از ۹۵٪ از میانگین جامعه از نمونه‌ای ۲۵ تایی، در بازهٔ  $(۱/۷۳, ۲/۳۱)$  باشد، برآورد نقطه‌ای از میانگین جامعه کدام است؟

۱/۴۵ (۲)

۵/۲۹ (۱)

۴/۰۴ (۴)

۲/۰۲ (۳)



بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه‌ای به صورت  $(۲۶/۷۵, ۳۲/۷۵)$  می‌باشد. اگر واریانس این جامعه ۸۱ باشد، اندازهٔ نمونه انتخاب‌شده کدام است؟

۶۴ (۲)

۲۶ (۱)

۳۶ (۴)

۸۱ (۳)





# حل تمرین

## آمار توصیفی و آمار استنباطی



تست



ضریب تغییرات داده‌های  $1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n$  برابر با کدام گزینه است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \quad (3)$$

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkan.app





تست



اگر میانگین داده‌های آماری  $2a - 1$ ،  $11 + 3b$  و  $1 + 4c$ ، برابر ۵ و انحراف معیار این داده‌ها برابر صفر باشد، واریانس داده‌های  $a$ ،  $b$  و  $c$  کدام است؟

$$\frac{38}{9} \quad (2)$$

$$\frac{115}{27} \quad (1)$$

$$\frac{37}{9} \quad (4)$$

$$\frac{113}{27} \quad (3)$$

تست



اختلاف مقادیر ۷ داده از میانگین آن‌ها اعداد متمایز و متوالی هستند، انحراف معیار داده‌ها چقدر است؟

$$2 \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

تست



اگر انحراف معیار داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر ۲ و ضریب تغییرات آن‌ها  $c$  باشد، ضریب تغییرات داده‌های  $2 + 5x_1, \dots, 2 + 5x_n$  کدام است؟

$$\frac{5+c}{5c} \quad (2)$$

$$\frac{5c}{5+c} \quad (1)$$

$$\frac{5+2c}{5c} \quad (4)$$

$$\frac{5c}{5+2c} \quad (3)$$

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





تست



در ۶ داده آماری مرتب شده با دامنه تغییرات ۱۲ و میانگین  $\sqrt{۳۳}$ ، تفاضل میانگین از داده‌ها به ترتیب  $b, -۲, ۰, ۱, ۳, a$  است. ضریب تغییرات این داده‌ها تقریباً چقدر است؟

(۲) ۰/۴۴

(۱) ۰/۶۰

(۴) ۰/۸۷

(۳) ۰/۶۷

تست



مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی یک جدول داده‌ها به طول دسته ۵، برابر ۱۰۰ می‌باشد. اگر دسته‌ها در هفت طبقه دسته‌بندی شده و مختصات پنجمین نقطه در نمودار (۸, ۲۵) باشد، درصد فراوانی نسبی دسته وسط چقدر است؟

(۲) ۴۰

(۱) ۳۲

(۴) ۶۴

(۳) ۴۸

تست



۱۰۰ مربع داریم که میانگین و واریانس طول اضلاع آن‌ها به ترتیب ۱۰ و ۱ است. در صورتی که طول اضلاع همگی ده درصد افزایش پیدا کند، مجموع مساحت مربع‌های جدید کدام است؟

(۲) ۱۱۲۲۱

(۱) ۱۱۱۲۱

(۴) ۱۲۲۲۱

(۳) ۱۲۱۲۱

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkan.app







تست



برای ۵۰ داده،  $\sum_{i=1}^{50} x_i = 200$  و  $\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1250$  است. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

(۲) ۱

(۱) ۰/۷۵

(۴) ۳

(۳) ۲/۲۵

تست



میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آن‌ها ۵ می‌باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

(۲) ۱۳۴

(۱) ۱۲۴

(۴) ۱۶۹

(۳) ۱۴۹

تست



داده‌های یک تحقیق آماری را در ۸ دسته، دسته‌بندی کرده‌ایم. اگر  $[3, b]$  حدود دسته دوم و  $[a, 9]$  حدود دسته پنجم باشند، مرکز دسته آخر کدام است؟

(۲) ۱۳/۲۵

(۱) ۱۱/۷۵

(۴) ۱۲/۷۵

(۳) ۱۲/۲۵

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app





اگر دو فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین جامعه‌ای با واریانس معلوم با استفاده از دو نمونه به صورت (۱۰, ۱۲) و (۹, ۱۳) به دست آمده باشند، نسبت اندازه نمونه اول به نمونه دوم کدام است؟

(۲) ۴

(۱)  $\frac{1}{4}$

(۴)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۲



میانگین داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر با ۲۶ است. اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این داده‌ها را برداریم و به جای آن‌ها یک داده که برابر با قدر مطلق اختلاف آن‌ها است را جایگزین کنیم، میانگین ۲۴ می‌شود. اگر تعداد داده‌های اولیه، نصف کوچک‌ترین داده باشد، آنگاه کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

(۲) کوچک‌ترین داده ۲۴ است.

(۱) کوچک‌ترین داده ۱۲ است.

(۴) بزرگ‌ترین داده ۴۸ است.

(۳) بزرگ‌ترین داده ۲۴ است.



اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه اضلاع مربع‌هایی به ترتیب ۴۰ و  $\frac{1}{10}$  باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

(۲) ۱۶۶۰

(۱) ۱۶۰۰

(۴) ۱۵۸۴

(۳) ۱۶۱۶

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkan.app





تست



چند درصد از داده‌های  $\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \dots, \frac{1}{18 \times 19}, \frac{1}{19 \times 20}, \frac{1}{20 \times 21}$  از میانگین آن‌ها بزرگ‌ترند؟

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

۱۰ (۴)

۲۶ (۳)

تست



اگر نمرات درس ریاضی یک کلاس ۱۴ نفره، ۱۷، ۸، ۱۸، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۲۰، ۱۹، ۲۰، ۱۷، ۱۳، ۱۶، ۱۸ باشد و بعد از آزمایش یک روش آموزشی جدید در این کلاس به نمرات کمتر از ۱۸ و بزرگ‌تر یا مساوی ۱۳ یک نمره و به نمرات کمتر از ۱۳ دو نمره اضافه شده باشد؛ در این صورت اختلاف دامنه میان چارکی نمرات جدید با میانه نمرات اولیه چقدر است؟

۱۲/۵ (۲)

۱۰/۵ (۱)

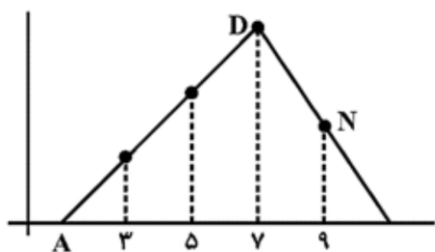
۱۲/۷۵ (۴)

۱۱/۵ (۳)

تست



اگر در نمودار چند بر فراوانی زیر AD خط راست به شیب ۱ و DN خطی راست به شیب  $-1/5$  باشد، آنگاه میانگین کدام است؟



$\frac{۳۲}{۵}$  (۲)

$\frac{۳۳}{۵}$  (۱)

$\frac{۱۹}{۳}$  (۴)

$\frac{۲۰}{۳}$  (۳)

سامانه امکان؛ آموزش مجازی کنکور

www.Emkana.app

